Р. П. Кузьмина

Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений

УРСС

Москва • 2003

ББК 22.161.6

Кузьмина Раиса Петровна

Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2003. — 336 с.

ISBN 5–354–00265–6

В книге рассматривается задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром. Книга восполняет некоторые пробелы, существующие в литературе в настоящее время. Кроме известных типов уравнений (регулярно возмущенная задача Коши, задача Тихонова) в книге рассматриваются новые типы уравнений (почти регулярная задача Коши, задача Коши с двойной сингулярностью). Для каждого типа уравнений построены ряды, которые обобщают известные ряды Пуанкаре, Васильевой—Иманалиева. Показано, что ряды являются асимптотическими разложениями решений или сходятся к решению на отрезке, полуоси, на асимптотически больших интервалах времени. Доказаны теоремы, позволяющие оценить численно остаточный член асимптотики, интервал времени существования, область значений малого параметра.

Книга предназначена тем, кто использует асимптотические методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД №05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 17.06.2003 г.
Формат 60×90/16. Тираж 480 экз. Печ. л. 21. Зак. № 2-983/209.

Отпечатано в типографии ООО «Рохос». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в *Internet*: http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (095) 135–44–23
Тел./факс: 7 (095) 135–42–46

ISBN 5–354–00265–6

Оглавление

Предисловие

В книге рассматривается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. Три части книги соответствуют трем способам вхождения малого параметра в задачу.

В первой части книги рассматривается *почти регулярная задача Коши*. Так названа задача, в которую сингулярность входит через ограниченную функцию f, зависящую от времени и малого параметра. Эта задача является обобщением регулярно возмущенной задачи Коши, которую исследовал А. Пуанкаре [39]. К почти регулярной задаче Коши можно привести некоторые задачи, которые решаются методом осреднения. В главе 2, в качестве примера такой задачи, рассмотрена задача Ван дер Поля.

Во второй части книги рассматривается *задача Тихонова* — задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих целые степени малого параметра при производных.

В третьей части книги рассмотрена *задача Коши с двойной сингулярностью*. Так названа задача Коши, состоящая из двух обыкновенных дифференциальных векторных уравнений, в одном из которых стоит целая степень малого параметра при производной. В правые части дифференциальных уравнений малый параметр входит как регулярным образом, так и сингулярным — через функцию f (так же, как в первой части книги). Таким образом, задача Коши с двойной сингулярностью содержит сингулярности двух видов, рассмотренных в первых двух частях книги. Если дифференциальное уравнение не зависит явно от f, то задача становится задачей Тихонова из второй части книги. В частном случае от задачи с двойной сингулярностью отщепляются уравнения, представляющие собой почти регулярную задачу Коши из первой части книги.

Для всех трех типов задач, рассмотренных в книге, описано построение рядов, обобщающих известные разложения Пуанкаре и Васильевой—Иманалиева. Доказано, что при выполнении соответствующих условий эти ряды являются асимптотическими разложениями решения или сходятся к решению на отрезке, на полуоси, на асимптотически больших интервалах времени. Доказаны теоремы, позволяющие оценить численно остаточный член асимптотического разложения решения, интервал времени существования решения, область значений малого параметра. Приводятся примеры, демонстрирующие возможности рассмотренных методов.

Книга предназначена математикам — специалистам по дифференциальным уравнениям и прикладным математикам, использующим асим-

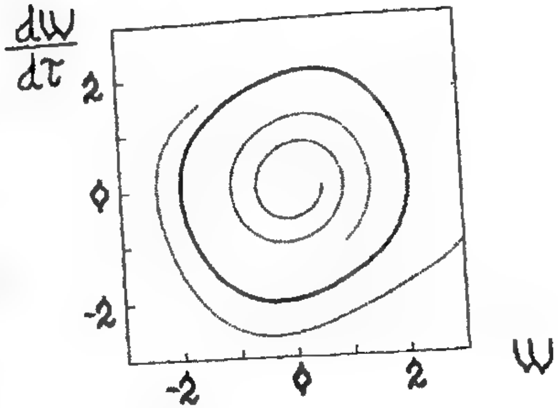
птотические методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Автор благодарит своего учителя проф. И. В. Новожилова, приобщившего его к миру асимптотических методов. Автор благодарит проф. В. Б. Колмановского, энтузиазм, доброжелательность и энергия которого посадили его за написание этой книги. Автор благодарит Л. Ю. Блажеинову-Микулич, С. А. Трубникова, П. А. Кручинина, вложивших большой труд в создание этой книги. Автор благодарит Е. В. Лапчук за ее рисунки к этой книге.

Автор благодарит издательство Kluwer Academic Publishers, опубликовавшего книгу на английском языке [25]. Автор благодарит РФФИ и программу «Университеты России» за поддержку (гранты № 01–01–00619, УР.04.03.10).

ЧАСТЬ 1

Почти регулярная задача Коши



Задача Ван дер Поля.
Фазовая плоскость. $\varepsilon = 0{,}2$.

Глава 1

Разложения решений почти регулярной задачи Коши

§ 1. Решение почти регулярной задачи Коши

1.1. Определение почти регулярной задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = F\big(x, t, \varepsilon, f(t, \varepsilon)\big), \quad x|_{t=0} = 0. \tag{1.1}$$

Здесь $x \in \mathbf{R}^N$, $F \in \mathbf{R}^N$ — N-мерные векторы, $f \in \mathbf{R}^M$ — M-мерный вектор, $\varepsilon \in \mathbf{R}$ — малый параметр, $t \in \mathbf{R}$ — независимая переменная (время), $\mathbf{R}^N$ — N-мерное векторное пространство действительных чисел.

Введем обозначения: $D_x \subset \mathbf{R}^N$ — окрестность точки $x = 0$, $D_f \subset \mathbf{R}^M$ — ограниченная и замкнутая область, T, $\bar{\varepsilon}$ — положительные числа.

Определение 1.1. Задача (1.1) называется *почти регулярной задачей Коши*, если: 1) $F(x, t, \varepsilon, f)$ — гладкая функция на прямом произведении окрестности D_x, отрезков $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}$ и области D_f, 2) f — гладкая функция на прямом произведении интервалов $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}$ со значениями в области D_f.

Если правая часть дифференциального уравнения (1.1) не зависит явно от f, то (1.1) — регулярно возмущенная задача Коши, которой занимался А. Пуанкаре [39] (смотрите § 9). В качестве примера возможной функции f приведем функцию

$$f = \big(\exp\{-t/\varepsilon\}, \cos(t/\varepsilon)\big).$$

1.2. Построение решения

Рассмотрим задачу с двумя малыми параметрами:

$$\frac{dz}{dt} = F\big(z, t, \varepsilon, f(t, \mu)\big), \quad z|_{t=0} = 0. \tag{1.2}$$

Задача (1.2) — регулярно возмущенная задача Коши относительно параметра ε. Ее решение строится *методом малого параметра Пуанкаре*, который заключается в следующем (предполагаем, что все операции имеют смысл) [39]:

- решение $z = z(t, \varepsilon, \mu)$ представляется в виде ряда по степеням малого параметра ε:

$$z(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t, \mu)\, \varepsilon^k; \tag{1.3}$$

- выражение (1.3) подставляется в (1.2);
- правая и левая часть уравнений (1.2) разлагаются в ряд по степеням ε;
- в полученных равенствах приравниваются коэффициенты при равных степенях ε.

В результате получаются уравнения для коэффициентов ряда (1.3).

Коэффициент $z^{(0)}(t, \mu)$ (*нулевое приближение решения* $z(t, \varepsilon, \mu)$ задачи (1.2)) является решением *вырожденной задачи*

$$\frac{dz^{(0)}}{dt} = F\big(z^{(0)}, t, 0, f(t, \mu)\big), \quad z^{(0)}|_{t=0} = 0. \tag{1.4}$$

Коэффициент $z^{(k)}(t, \mu)$ при любом $k \geqslant 0$ является решением задачи

$$\frac{dz^{(k)}}{dt} = \left[F\left(\sum_{i=0}^{k} z^{(i)}(t, \mu)\varepsilon^i,\ t,\ \varepsilon, f(t, \mu)\right)\right]^{(k)}, \qquad z^{(k)}|_{t=0} = 0. \tag{1.5}$$

Скобки с верхним индексом $^{(k)}$ обозначают коэффициент при ε^k в разложении функции, стоящей в скобках, в ряд по степеням параметра ε.

Запишем уравнения (1.5) для $k \geqslant 1$ в виде

$$\frac{dz^{(k)}}{dt} = A(t, \mu)\, z^{(k)} + F^{(k)}(t, \mu), \quad z^{(k)}|_{t=0} = 0. \tag{1.6}$$

Здесь

$$A(t, \mu) \equiv F_z\Big(z^{(0)}(t, \mu), t, 0, f(t, \mu)\Big),$$
$$F^{(k)}(t, \mu) \equiv \left[F\left(\sum_{i=0}^{k-1} z^{(i)}(t, \mu)\varepsilon^i, t, \varepsilon, f(t, \mu)\right)\right]^{(k)}, \tag{1.7}$$

F_z — *матрица Якоби*, составленная из частных производных компонент вектора F по компонентам вектора z. Функция $F^{(k)}(t, \mu)$ зависит от $z^{(0)}(t, \mu)$, ..., $z^{(k-1)}(t, \mu)$, $k \geqslant 1$.

Задача (1.6) линейна. Ее решение имеет вид

$$z^{(k)}(t, \mu) = \int_0^t U(t, s, \mu) \cdot F^{(k)}(s, \mu)\, ds. \tag{1.8}$$

Здесь $U(t, s, \mu)$ — матрица Коши *уравнений в вариациях*

$$\frac{d\zeta}{dt} = A(t, \mu)\,\zeta. \tag{1.9}$$

(*Матрица Коши* $U(t, s, \mu)$ — фундаментальная матрица системы (1.9), равная единичной при $t = s$: $U(s, s, \mu) = E$).

При $\mu = \varepsilon$ ряд (1.3) принимает вид

$$\boxed{x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t, \varepsilon)\,\varepsilon^k.} \tag{1.10}$$

Ниже доказываются теоремы 2.1–2.4 о сходимости ряда (1.10) к решению задачи (1.1). При выполнении условий теорем 2.5–2.8 ряд (1.10) является асимптотическим разложением решения задачи (1.1):

$$\boxed{x(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t, \varepsilon)\varepsilon^k} \tag{1.11}$$

(определение и обозначение асимптотического разложения смотрите в п. 2.2).

Таким образом, для получения решения в виде (1.10), (1.11) необходимо знать нулевое приближение решения $z^{(0)}(t, \mu)$ и матрицу $U(t, s, \mu)$. Тогда коэффициенты рядов (1.10), (1.11) вычисляются последовательно по формулам (1.8) для $k = 1, 2, \ldots$

Приведем теорему, позволяющую иногда находить матрицу Коши в явном виде.

Теорема 1.1. (Пуанкаре [4]) *Если общее решение $g(t, C)$ дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) \tag{1.12}$$

известно (C — вектор произвольных постоянных), то матрица Коши системы

$$\frac{d\zeta}{dt} = F_x(x^{(0)}(t), t)\,\zeta$$

имеет вид

$$U(t, s) = U_*(t) \cdot U_*^{-1}(s), \quad U_*(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial C_1} \;\ldots\; \frac{\partial g}{\partial C_N}\right)\Bigg|_{C=C^\circ}.$$

Здесь $x^{(0)}(t)$ — частное решение задачи (1.12), C° — значение, определяющее это частное решение: $g(t, C^\circ) = x^{(0)}(t)$.

В (1.12) функции и решение могут зависеть от параметров. Поэтому матрицу Коши $U(t, s, \mu)$ уравнения (1.9) можно найти, если известно общее решение дифференциального уравнения (1.4).

1.3. Переход от задачи с ненулевым начальным значением к задаче (1.1)

Покажем, как от задачи

$$\frac{d\widetilde{x}}{dt} = \widetilde{F}\big(\widetilde{x}, t, \varepsilon, \widetilde{f}(t,\varepsilon)\big), \quad \widetilde{x}|_{t=0} = \widetilde{x}^{\circ}(\varepsilon) \tag{1.13}$$

перейти к задаче (1.1). (Предполагаем, что все операции имеют смысл). При гладких начальных значениях вырожденная для (1.13) задача имеет вид

$$\frac{d\widetilde{z}^{(0)}}{dt} = \widetilde{F}\big(\widetilde{z}^{(0)}, t, 0, \widetilde{f}(t,\mu)\big), \quad \widetilde{z}^{(0)}|_{t=0} = \widetilde{x}^{\circ}(0). \tag{1.14}$$

Сделаем замену переменных

$$x = \widetilde{x} - \widetilde{z}^{(0)}(t,\varepsilon) - \widetilde{x}^{\circ}(\varepsilon) + \widetilde{x}^{\circ}(0). \tag{1.15}$$

Из (1.13), (1.14) следует, что x — решение задачи (1.1), в которой

$$\begin{aligned} F(x,t,\varepsilon,f(t,\varepsilon)) \equiv \widetilde{F}\big(x + \widetilde{z}^{(0)}(t,\varepsilon) + \widetilde{x}^{\circ}(\varepsilon) - \widetilde{x}^{\circ}(0),\ t,\ \varepsilon,\ \widetilde{f}(t,\varepsilon)\big) - \\ - \widetilde{F}\big(\widetilde{z}^{(0)}(t,\varepsilon), t, 0, \widetilde{f}(t,\varepsilon)\big), \end{aligned} \tag{1.16}$$

что и требовалось.

Отметим, что если функцию f можно выразить через $\widetilde{z}^{(0)}$, $\widetilde{f}$, то есть если

$$\begin{aligned} F(x,t,\varepsilon,f(t,\mu)) = \widetilde{F}\big(x + \widetilde{z}^{(0)}(t,\mu) + \widetilde{x}^{\circ}(\varepsilon) - \widetilde{x}^{\circ}(0), t, \varepsilon, \widetilde{f}(t,\mu)\big) - \\ - \widetilde{F}\big(\widetilde{z}^{(0)}(t,\mu), t, 0, \widetilde{f}(t,\mu)\big), \end{aligned}$$

то задача (1.13) приводится к задаче (1.1) с условием

$$F(0,t,0,f(t,\mu)) = 0$$

(смотрите условие 2.1). В этом случае нулевое приближение решения задачи (1.1) равно нулю: $z^{(0)}(t,\varepsilon) = 0$ ($z^{(0)}(t,\mu)$ — решение задачи (1.4)).

§ 2. Формулировки теорем о почти регулярной задаче Коши

2.1. Точное решение

Здесь используются обозначения: $\mathbf{C}^N$ — N-мерное векторное пространство комплексных чисел, D_t — множество в пространстве $\mathbf{R} \ni t$, δ — положительная постоянная, X_n — частичная сумма ряда (1.10),

$$X_n(t,\varepsilon) \equiv \sum_{k=0}^{n} z^{(k)}(t,\varepsilon)\, \varepsilon^k, \tag{2.1}$$

$U(t,s,\mu)$ — матрица Коши системы

$$\frac{d\zeta}{dt} = A(t,\mu)\,\zeta, \quad A(t,\mu) = F_x\big(z^{(0)}(t,\mu), t, 0, f(t,\mu)\big). \tag{2.2}$$

Нормы вектора x *и матрицы* A определяются равенствами

$$\|x\| \equiv \max_{i=\overline{1,N}} |x_i|, \qquad \|A\| \equiv \max_{i=\overline{1,N}} \sum_{j=1}^{N} |A_{ij}|,$$

$$x = (x_1, \ldots, x_N), \quad A = (A_{ij}).$$

Сформулируем условия, при которых будем рассматривать задачу (1.1).

Условие 2.1. $F(0,t,0,f) = 0$ *при* $t \in D_t$, $f \in D_f$.

Условие 2.2. *На множестве* $x \in \mathbf{C}^N$, $\|x\| \leqslant \delta$, $t \in D_t$, $\varepsilon \in \mathbf{C}$, $|\varepsilon| \leqslant \overline{\varepsilon}$, $f \in D_f$ *функция* $F(x,t,\varepsilon,f)$ *непрерывна по совокупности аргументов, аналитична по* x, ε, *ограничена по норме.*

Условие 2.3. *На множестве* $x \in \mathbf{R}^N$, $\|x\| \leqslant \delta$, $t \in D_t$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \overline{\varepsilon}$, $f \in D_f$ *функция* $F(x,t,\varepsilon,f)$ *имеет непрерывные и ограниченные по норме частные производные до порядка* n_* *включительно по* ε *и по компонентам вектора* x, $n_* = \max(2, n+1)$.

Условие 2.4. *На множестве* $t \in D_t$, $0 < \varepsilon \leqslant \overline{\varepsilon}$ *функция* $f(t,\varepsilon)$ *непрерывна по* t *и* $f(t,\varepsilon) \in D_f$.

Свойства разложения (1.10) определяются следующими теоремами:

Теорема 2.1. *Пусть при* $D_t = \{t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $T > 0$ *выполняются условия* 2.1, 2.2, 2.4. *Тогда найдется постоянная* $\varepsilon_* > 0$, *не зависящая от* t, ε *и такая, что на множестве* $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$: 1) *решение задачи* (1.1) *существует и единственно,* 2) *ряд* (1.10) *сходится равномерно к решению задачи* (1.1).

Теорема 2.2. *Пусть при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$, $\kappa > 0$ *выполняются условия* 2.1, 2.2, 2.4 *и справедливо неравенство*

$$\|U(t,s,\mu)\| \leqslant Ce^{-\kappa(t-s)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \quad 0 < \mu \leqslant \overline{\varepsilon}. \tag{2.3}$$

Тогда найдется постоянная $\varepsilon_* > 0$, *не зависящая от* t, ε *и такая, что на множестве* $t \geqslant 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$: 1) *решение задачи* (1.1) *существует и единственно,* 2) *ряд* (1.10) *сходится равномерно к решению задачи* (1.1).

Теорема 2.3. *Пусть при* $D_t = \{t\colon\ t \geqslant 0\}$, $\kappa \geqslant 0$, $C^\circ \geqslant 0$ *выполняются условия* 2.1, 2.2, 2.4 *и справедливо неравенство*

$$\|U(t,s,\mu)\| \leqslant C^\circ (t-s)^\kappa + C, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \quad 0 < \mu \leqslant \overline{\varepsilon}. \tag{2.4}$$

Тогда для любых значений $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < [2(\kappa+1)]^{-1}$, *найдется постоянная* $\varepsilon_* > 0$, *не зависящая от* t, ε *и такая, что на множестве* $0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-\chi}$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$: 1) *решение задачи* (1.1) *существует и единственно,* 2) *ряд* (1.10) *сходится равномерно к решению задачи* (1.1).

Теорема 2.4. *Пусть при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$, $\kappa > 0$ *выполняются условия* 2.1, 2.2, 2.4 *и справедливо неравенство*

$$\|U(t, s, \mu)\| \leqslant Ce^{\kappa(t-s)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}. \tag{2.5}$$

Тогда для любых значений $T \geqslant 0$, χ, $0 \leqslant \chi < (2\kappa)^{-1}$, *найдется постоянная* $\varepsilon_* > 0$, *не зависящая от* t, ε *и такая, что на множестве* $0 \leqslant t \leqslant T - \chi \ln \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$: 1) *решение задачи* (1.1) *существует и единственно,* 2) *ряд* (1.10) *сходится равномерно к решению задачи* (1.1).

2.2. Асимптотическое решение

Теорема 2.5. *Пусть при* $D_t = \{t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $T > 0$ *выполняются условия* 2.1, 2.3, 2.4. *Тогда найдутся постоянные* $\varepsilon_* > 0$, C_*, *не зависящие от* t, ε *и такие, что решение задачи* (1.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leqslant C_* t \varepsilon^{n+1}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$.

Теорема 2.6. *Пусть при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$, $\kappa > 0$ *выполняются условия* 2.1, 2.3, 2.4 *и неравенство* (2.3). *Тогда найдутся постоянные* $\varepsilon_* > 0$, C_*, *не зависящие от* t, ε *и такие, что решение задачи* (1.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leqslant C_* \varepsilon^{n+1}\left(1 - e^{-\kappa t}\right)$$

при $t \geqslant 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$.

Теорема 2.7. *Пусть при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$, $\kappa \geqslant 0$, $C^\circ \geqslant 0$ *выполняются условия* 2.1, 2.3, 2.4 *и неравенство* (2.4). *Тогда для любых значений* $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < [2(\kappa + 1)]^{-1}$, *найдутся постоянные* $\varepsilon_* > 0$, C_*, $C_*^\circ \geqslant 0$, *не зависящие от* t, ε *и такие, что решение задачи* (1.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^{n+1}\left[C_*^\circ t^{(\kappa+1)(2n+1)} + C_* t\right]$$

при $0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-\chi}$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$.

Теорема 2.8. *Пусть при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$, $\kappa > 0$ *выполняются условия* 2.1, 2.3, 2.4 *и неравенство* (2.5). *Тогда для любых значений* $T \geqslant 0$, χ, $0 \leqslant \chi < (n + 1)[(n + 2)\kappa]^{-1}$, *найдутся постоянные* $\varepsilon_* > 0$, C_*, *не зависящие от* t, ε *и такие, что решение задачи* (1.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенствам*

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leqslant C_* \varepsilon (e^{\kappa t} - 1),$$
$$\|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leqslant C_* \varepsilon^{n+1} e^{\kappa t}(e^{n\kappa t} - 1), \quad n \geqslant 1$$

при $0 \leqslant t \leqslant T - \chi \ln \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$.

Из приведенных теорем следует, что в ряде случаев ряд (1.11) является асимптотическим рядом решения задачи (1.1).

Определение 2.1. Функция $X(t,\varepsilon)$ называется *асимптотическим приближением функции* $x(t,\varepsilon)$ *на множестве* $D_t = D_t(\varepsilon) \ni t$ *при* $\varepsilon \to 0$, если найдется такое значение $\varepsilon_* > 0$, что $x(t,\varepsilon)$, $X(t,\varepsilon)$ существуют при $t \in D_t(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ и

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \sup_{t\in D_t(\varepsilon)} \|x(t,\varepsilon) - X(t,\varepsilon)\| = 0.$$

Если при этом

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \frac{\sup\limits_{t\in D_t(\varepsilon)} \|x(t,\varepsilon) - X(t,\varepsilon)\|}{\psi_1(\varepsilon)} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \frac{\sup\limits_{t\in D_t(\varepsilon)} \|x(t,\varepsilon) - X(t,\varepsilon)\|}{\psi_2(\varepsilon)} = \mathrm{const},$$

то $X(t,\varepsilon)$ называется *асимптотическим приближением функции* $x(t,\varepsilon)$ *на множестве* $D_t(\varepsilon)$ *с точностью порядка* $o(\psi_1(\varepsilon))$, $O(\psi_2(\varepsilon))$. Обозначение:

$$x(t,\varepsilon) = X(t,\varepsilon) + o(\psi_1(\varepsilon)),$$
$$x(t,\varepsilon) = X(t,\varepsilon) + O(\psi_2(\varepsilon)), \quad t \in D_t(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0.$$

Определение 2.2. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(t,\varepsilon)$ называется *асимптотическим рядом (асимптотическим разложением, асимптотикой) функции* $x(t,\varepsilon)$ *на множестве* $D_t(\varepsilon)$ *при* $\varepsilon \to 0$, если для любого $n \geqslant 0$

$$x(t,\varepsilon) = X_n(t,\varepsilon) + o(\psi_n(\varepsilon)), \quad t \in D_t(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \frac{\psi_{n+1}(\varepsilon)}{\psi_n(\varepsilon)} = 0, \quad X_n(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} x^{(k)}(t,\varepsilon).$$

Обозначение:

$$x(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(t,\varepsilon), \quad t \in D_t(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0.$$

Определение 2.3. Функция $X_n(t,\varepsilon)$ называется *n-м приближением функции* $x(t,\varepsilon)$.

Разность $u(t,\varepsilon) \equiv x(t,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon)$ называется *остаточным членом асимптотического разложения функции* $x(t,\varepsilon)$ *n-го порядка.*

Интервал $0 \leqslant t \leqslant t_*$ $(0 \leqslant t < t_*)$ называется *асимптотически большим интервалом переменной* t *при* $\varepsilon \to 0$, если

$$t_* = t_*(\varepsilon) \geqslant 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0+0} t_*(\varepsilon) = \infty.$$

Из теорем 2.5–2.8 следует, что функция $X_n(t,\varepsilon)$, задаваемая формулой (2.1), является асимптотическим приближением решения (*асимптотическим решением*) системы (1.1) на отрезке (теорема 2.5), на полуоси (теорема 2.6) или на асимптотически больших интервалах времени (теоремы 2.7, 2.8). Справедливы равенства

$$x(t,\varepsilon) = X_n(t,\varepsilon) + o(\varepsilon^n), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{(теорема 2.5);}$$
$$x(t,\varepsilon) = X_n(t,\varepsilon) + o(\varepsilon^n), \quad t \geqslant 0, \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{(теорема 2.6);}$$
$$x(t,\varepsilon) = X_n(t,\varepsilon) + o(\varepsilon^{n\chi_*}), \quad 0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-\chi}, \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{(теорема 2.7),}$$

где T, χ — произвольные числа из множества $T > 0$, $0 \leqslant \chi < [2(\kappa+1)]^{-1}$, $\chi_* = 1 - 2\chi(\kappa+1)$;

$$x(t,\varepsilon) = X_n(t,\varepsilon) + o\left(\varepsilon^{n\chi_*}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant T - \chi\ln\varepsilon, \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{(теорема 2.8),}$$

где T, χ — произвольные числа из множества $T \geqslant 0$, $0 \leqslant \chi < (2\kappa)^{-1}$, $\chi_* = 1 - 2\kappa\chi$.

2.3. Точное решение при фиксированном значении ε

В прикладных задачах ε — фиксированная величина. Поэтому бывает полезной следующая теорема о сходимости ряда (1.10) к решению:

Теорема 2.9. *Пусть при* $D_t = \{t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $T > 0$ *выполняются условия* 2.1, 2.2, 2.4. *Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}$, *найдется такая постоянная* $t_* = t_*(\varepsilon)$, *что* $0 < t_* \leqslant T$ *и на множестве* $0 \leqslant t \leqslant t_*$: 1) *решение задачи* (1.1) *существует и единственно*, 2) *ряд* (1.10) *сходится равномерно к решению задачи* (1.1).

2.4. Оценка остаточного члена, интервала времени, значений малого параметра

Приведем теорему, позволяющую получать оценки остаточного члена асимптотического разложения решения; интервала времени, на котором решение существует; значений малого параметра. Для этого рассмотрим задачу

$$\frac{du}{dt} = A(t)\,u + G(u,t), \quad u(0) = u^\circ. \tag{2.6}$$

Правые части в (2.6) могут зависеть от малого параметра.

Условие 2.5. *Матрица* $A(t)$ *непрерывна по* t *при* $0 \leqslant t \leqslant t_*$.

Условие 2.6. $\|u^\circ\| < \delta$.

Условие 2.7. *При* $\|u\| \leqslant \delta$, $\|\widetilde{u}\| \leqslant \delta$, $0 \leqslant t \leqslant t_*$ *функция* $G(u,t)$ *непрерывна по* u, t *и удовлетворяет неравенству*

$$\|G(u,t) - G(\widetilde{u},t)\| \leqslant \left[L_1(t) + L_2(t)(\|u\| + \|\widetilde{u}\|)\right] \cdot \|u - \widetilde{u}\|, \tag{2.7}$$

где $L_1(t) \geqslant 0$, $L_2(t) \geqslant 0$ *непрерывны по* t.

Обозначим

$$a(t) = \max_{0\leqslant q\leqslant t} \left\| U(q,0)u^\circ + \int\limits_0^q U(q,s)\cdot G(0,s)\,ds \right\|,$$

$$b(t) = \max_{0\leqslant q\leqslant t} \int\limits_0^q \|U(q,s)\|\cdot L_1(s)\,ds, \tag{2.8}$$

$$c(t) = \max_{0\leqslant q\leqslant t} \int\limits_0^q \|U(q,s)\|\cdot L_2(s)\,ds,$$

где $U(t,s)$ — матрица Коши системы

$$\frac{d\zeta}{dt} = A(t)\,\zeta.$$

Теорема 2.10. *Пусть при* $\delta > 0$, $t_* > 0$ *выполняются условия* 2.5–2.7. *Тогда решение задачи* (2.6) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|u(t)\| \leqslant \frac{2a(t)}{p(t)+\sqrt{r(t)}} \tag{2.9}$$

при всех значениях t *из множества*

$$\begin{aligned} &p(t) \equiv 1 - b(t) > 0, \qquad r(t) \equiv p^2(t) - 4a(t)c(t) > 0,\\ &2a(t) < \delta\left[p(t)+\sqrt{r(t)}\right], \quad 0\leqslant t\leqslant t_*. \end{aligned} \tag{2.10}$$

2.5. Второй метод Ляпунова

Рассмотрим второй метод Ляпунова для задачи (1.1). Введем обозначения: J — целое число, $1\leqslant J\leqslant N$; $\widetilde{x}$ — вектор, состоящий из J компонент вектора x; D — множество в пространстве $\mathbf{R}^{N+2} \ni (x,t,\varepsilon)$; $D_* \equiv \left\{(x,t,\varepsilon):\ \|x\|\leqslant\delta,\ t\geqslant 0,\ 0<\varepsilon\leqslant\overline{\varepsilon}\right\}$.

Определение 2.4. *Производной по времени функции* $\Lambda(u,t,\varepsilon)$ *в силу системы* (1.1) называется функция

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial\Lambda(x,t,\varepsilon)}{\partial x}F\big(x,t,\varepsilon,f(t,\varepsilon)\big) + \frac{\partial\Lambda(x,t,\varepsilon)}{\partial t}.$$

Функция $\Lambda(x,t,\varepsilon)$ называется *неположительной на множестве* D, если $\Lambda(x,t,\varepsilon)\leqslant 0$ при $(x,t,\varepsilon)\in D$.

В основе второго метода Ляпунова лежит следующее обстоятельство. Пусть при $(x,t,\varepsilon)\in D$ производная по времени функции $\Lambda(x,t,\varepsilon)$ в силу

системы (1.1) неположительна. Тогда для решения $x = x(t, \varepsilon)$ задачи (1.1) справедливо неравенство

$$\Lambda(x(T, \varepsilon), T, \varepsilon) \leqslant \Lambda(0, 0, \varepsilon) \tag{2.11}$$

при всех T, ε, удовлетворяющих условиям: при $0 \leqslant t \leqslant T$ решение $x(t, \varepsilon)$ существует и $x(t, \varepsilon) \in D$. Неравенство (2.11) позволяет иногда получить оценку вектора x или отдельных его компонент. Например, справедлива

Теорема 2.11. *Пусть для некоторых постоянных $\delta > 0$, $\overline{\varepsilon} > 0$, $\rho > 0$ выполнены условия.*

1) *При $(x, t, \varepsilon) \in D_*$ функция $F(x, t, \varepsilon, f(t, \varepsilon))$ непрерывна по t и имеет непрерывные по x, t частные производные по компонентам вектора x.*
2) *Существует такая функция $\Lambda(x, t, \varepsilon)$, что*:
   а) при $(x, t, \varepsilon) \in D_*$ производная по времени функции $\Lambda(x, t, \varepsilon)$ в силу системы (1.1) *существует и неотрицательна;*
   б) $\Lambda(x, t, \varepsilon) \geqslant \rho$ при $(x, t, \varepsilon) \in D_*$, $\|\overline{x}\| = \delta$.

Тогда, если множество

$$0 < \varepsilon \leqslant \overline{\varepsilon}, \quad \Lambda(0, 0, \varepsilon) < \rho \tag{2.12}$$

не пусто, то для любого ε из этого множества решение задачи Коши (1.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству $\|\overline{x}(t, \varepsilon)\| < \delta$ при $0 \leqslant t \leqslant t_*$, $t < \infty$. Если $J = N$, то $t_* = \infty$; если $J < N$, то $t_* = t_*(\varepsilon) > 0$.*

Определение 2.5. Функция $\Lambda(x, t, \varepsilon)$, удовлетворяющая условиям 2*а*, 2*б* теоремы 2.11 называется *функцией Ляпунова*.

Теорема 2.11 аналогична теореме Ляпунова при $J = N$ [33] и теореме Румянцева при $J < N$ [41]. При выполнении условий теоремы 2.11, как следует из ее доказательства в § 7, для всех ε из множества (2.12) и t, $0 \leqslant t \leqslant t_*$, $t < \infty$, справедливо неравенство

$$\Lambda(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \leqslant \Lambda(0, 0, \varepsilon). \tag{2.13}$$

Неравенство $d\Lambda/dt \leqslant 0$ и неравенства (2.11), (2.13) позволяют иногда получить оценку решения задачи (1.1) и оценку значений t, ε (смотрите пример 8.4).

2.6. Замечания

Замечание 2.1. Определение почти регулярной задачи Коши дано для отрезка $0 \leqslant t \leqslant T$. Из теорем 2.2–2.4, 2.6–2.8 следует, что при определенных условиях решение почти регулярной задачи Коши распространяется на бесконечный или на асимптотически большой интервал времени.

Замечание 2.2. Если D_t — отрезок $0 \leqslant t \leqslant T$, то ограниченность по норме в условиях 2.2, 2.3 следует из непрерывности функции и производных.

Замечание 2.3. Если начальное значение искомой функции в (1.1) не равно нулю, то нужно перейти к новой переменной, как показано в п. 1.3.

Замечание 2.4. При выполнении условия 2.1 $z^{(0)}(t,\mu)=0$, $X_0(t,\varepsilon)=0$.

Замечание 2.5. Если матрица $A(t,\mu)$ не зависит от t, μ, то неравенство (2.3) выполняется, если собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости. Если собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости и на мнимой оси, то матрица U удовлетворяет неравенству (2.4). Если же матрица A имеет собственные числа и в правой полуплоскости, то матрица U удовлетворяет неравенству (2.5). Смотрите теорему 13.1.

Замечание 2.6. Если в (2.6) правые части зависят от малого параметра ε, то неравенства (2.10) и условие 2.6 оценивают и интервал времени t существования решения, и множество значений малого параметра ε.

Замечание 2.7. Доказательства теорем 2.1–2.11 приведены в § 3 — § 7.

Замечание 2.8. Если функция F в (1.1) не зависит явно от f, то задача (1.1) становится регулярно возмущенной и теоремы 2.1–2.11 переходят соответственно в теоремы 9.1–9.11. При этом интервал $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_*$ заменяется на $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_*$, интервал $0<\varepsilon<\overline{\varepsilon}$ заменяется на $0\leqslant\varepsilon<\overline{\varepsilon}$.

§ 3. Доказательство теорем 2.1–2.4

3.1. Матрица Коши U

Утверждение 3.1. *Матрица $U(t,s,\mu)$ существует, единственна, непрерывна по t, s на множестве*

$$t\in D_t,\quad s\in D_s,\quad 0\leqslant s\leqslant t,\quad 0<\mu\leqslant\overline{\varepsilon}.$$

$$D_t\equiv\begin{cases} t\colon\ 0\leqslant t\leqslant T & \textit{для теоремы } 2.1;\\ t\colon\ t\geqslant 0 & \textit{для теорем } 2.2\text{–}2.4.\end{cases}$$

Доказательство. Из условия 2.1 следует, что $z^{(0)}(t,\mu)=0$. Поэтому формула (2.2) для $A(t,\mu)$ имеет вид

$$A(t,\mu)=F_x(0,t,0,f(t,\mu)). \tag{3.1}$$

Для функции $\mathcal{F}(z_1,\ldots,z_N)$, аналитической на множестве $|z_i|\leqslant\delta$, $i=\overline{1,N}$, $z_i\in\mathbf{C}$, справедлива *интегральная формула Коши*

$$\mathcal{F}(z_1,\ldots,z_N)=(2\pi i)^{-N}\int\limits_{|\zeta_N|=\delta}\cdots\int\limits_{|\zeta_1|=\delta}\frac{F(\zeta_1\ldots\zeta_N)\,d\zeta_1\ldots d\zeta_N}{(\zeta_1-z_1)\ldots(\zeta_N-z_N)}. \tag{3.2}$$

Из этой формулы для аналитической по x функции F из (1.1) следует:

$$F_{x_j}(0,t,0,f)=\frac{1}{(2\pi i)^N}\int\limits_{|z_N|-\delta}\cdots\int\limits_{|z_1|-\delta}\left.\frac{F(z,t,0,f)\,dz_1\ldots dz_N}{(z_1-x_1)\ldots(z_j-x_j)^2\ldots(z_N-x_N)}\right|_{x=0}.$$

По условию 2.2 функция F непрерывна по совокупности аргументов на множестве

$$\|x\|\leqslant\delta,\quad t\in D_t,\quad |\varepsilon|\leqslant\overline{\varepsilon},\quad f\in D_f. \tag{3.3}$$

Поэтому производная $F_{x_r}(0, t, 0, f)$ непрерывна по t, f при

$$t \in D_t, \quad f \in D_f. \tag{3.4}$$

Отсюда, из (3.1), из условия 2.4 следует непрерывность $A(t, \mu)$ по t при

$$t \in D_t, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}. \tag{3.5}$$

Матрица $U(t, s, \mu)$ является фундаментальной матрицей линейных однородных уравнений

$$\frac{d\zeta}{dt} = A(t, \mu)\, \zeta, \quad U(s, s, \mu) = E.$$

Утверждение 3.1 о матрице U следует из теоремы о существовании, единственности и непрерывной зависимости от начальных данных для решения линейной задачи Коши [4]. □

3.2. Коэффициенты ряда (1.3)

Утверждение 3.2. *Функции $z^{(k)}(t, \mu)$, $k = 0, 1, \ldots$, существуют, единственны, непрерывно дифференцируемы по t на множестве* (3.5).

Доказательство. Функция $z^{(0)}(t, \mu)$ является решением вырожденной задачи (1.4). Из условия 2.1 следует, что вырожденная задача имеет нулевое решение. Единственность нулевого решения следует из локального условия Липшица по z, которому удовлетворяет функция $F(z, t, 0, f(t, \mu))$ при $\|z\| \leqslant \delta$, $t \in D_t$, $0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}$. Таким образом, $z^{(0)}(t, \mu) = 0$, как и отмечено в замечании 2.4.

Предположим, что утверждение 3.2 справедливо для функций $z^{(k)}(t, \mu)$, $k = \overline{0, j-1}$, то есть $z^{(0)}(t, \mu)$, ..., $z^{(j-1)}(t, \mu)$ существуют, единственны и непрерывно дифференцируемы по t на множестве (3.5). Как следует из уравнений (1.6), (1.7), функция $z^{(j)}(t, \mu)$ является решением задачи

$$\begin{gathered} \frac{dz^{(j)}}{dt} = A(t, \mu)\, z^{(j)} + F^{(j)}(t, \mu), \quad z^{(j)}(0, \mu) = 0, \\ F^{(j)}(t, \mu) = \left[F\left(\sum_{i=0}^{j-1} z^{(i)}(t, \mu)\, \varepsilon^i,\ t,\ \varepsilon, f(t, \mu)\right)\right]^{(j)}. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Для производной аналитической по x, ε функции справедлива формула

$$\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_{N+1}}\, F(x, t, \varepsilon, f)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_N^{k_N}\ \partial \varepsilon^{k_{N+1}}} = \frac{(k_1!) \ldots (k_{N+1}!)}{(2\pi i)^{N+1}} \times$$

$$\times \int\limits_{|\mu|=\bar{\varepsilon}} \int\limits_{|z_N|=\delta} \cdots \int\limits_{|z_1|=\delta} \frac{F(z, t, \mu, f)\, dz_1 \ldots dz_N\, d\mu}{(z_1 - x_1)^{k_1+1} \ldots (z_N - x_N)^{k_N+1} (\mu - \varepsilon)^{k_{N+1}+1}}, \tag{3.7}$$

из которой следует, что производные $F(x, t, \varepsilon, f)$ по x, ε непрерывны по t, f при $x = 0$, $\varepsilon = 0$ на множестве (3.4). Поэтому функция $F^{(j)}(t, \mu)$ из (3.6) непрерывна по t на множестве (3.5).

Функция $z^{(j)}(t, \mu)$ существует, единственна, непрерывно дифференцируема по t как решение линейной задачи Коши (3.6) с непрерывной правой частью. Таким образом, если утверждение 3.2 справедливо для $k = \overline{0, j-1}$, то оно справедливо и для $k = j$. Так как при $k = 0$ утверждение 3.2 доказано, то отсюда по индукции следует, что утверждение 3.2 справедливо для всех $k \geqslant 0$. □

3.3. Мажоранта для функции G

Рассмотрим функцию

$$G(x, t, \varepsilon, f) \equiv F(x, t, \varepsilon, f) - F(0, t, 0, f) - F_x(0, t, 0, f)\, x. \tag{3.8}$$

Определение 3.1. Ряд

$$\varphi(x) = \sum_{i_1+\ldots+i_N=0}^{\infty} a_{i_1\ldots i_N}\, x_1^{i_1} \ldots x_N^{i_N}$$

называется *мажорирующим для ряда*

$$\psi(x) = \sum_{i_1+\ldots+i_N=0}^{\infty} b_{i_1\ldots i_N}\, x_1^{i_1} \ldots x_N^{i_N},$$

если выполняются неравенства $|b_{i_1\ldots i_N}| \leqslant a_{i_1\ldots i_N}$. Функция $\varphi(x)$ называется *мажорантой*. Обозначение: $\psi \ll \varphi(arg\ x)$.

Определение 3.2. Пусть $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ — вектор и $A = (a_{ij})$ — матрица. Тогда обозначения $f \ll \varphi_1(\arg x)$, $A \ll \varphi_2(\arg x)$ эквивалентны следующим: $f_i \ll \varphi_1(\arg x)$, $a_{ij} \ll \varphi_2(\arg x)$, $i, j = \overline{1, n}$.

Для упрощения доказательства теорем 2.1–2.4 положим

$$\delta = 1 + \Delta_\delta, \quad \overline{\varepsilon} = 1 + \Delta_\varepsilon, \quad \Delta_\delta > 0, \quad \Delta_\varepsilon > 0. \tag{3.9}$$

При других значениях δ, $\overline{\varepsilon}$ можно перейти к (3.9) соответствующим сжатием (или растяжением) x, ε.

Представим функцию (3.8) в следующем виде:

$$G(x, t, \varepsilon, f) = \big[F(x, t, \varepsilon, f) - F(x, t, 0, f)\big] + \\ + \big[F(x, t, 0, f) - F(0, t, 0, f) - F_x(0, t, 0, f)\, x\big] = \\ = \int_0^1 F_\varepsilon(x, t, \theta\varepsilon, f)\, d\theta\varepsilon + \\ + \int_0^1 \int_0^1 \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x_j}(\theta\theta_1 x, t, 0, f)\theta x_j x\, d\theta_1\, d\theta. \tag{3.10}$$

Воспользуемся интегральными формулами Коши

$$F_\varepsilon(x,t,\varepsilon,f)=\frac{1}{(2\pi i)^{N+1}}\oint\limits_1\frac{F(z,t,\mu,f)\,dz_1\ldots dz_N\,d\mu}{(z_1-x_1)\ldots(z_N-x_N)(\mu-\varepsilon)^2},$$

$$\frac{\partial^2F(x,t,\varepsilon,f)}{\partial x_j\partial x_k}=\frac{1+\delta_{jk}}{(2\pi i)^{N+1}}\oint\limits_1\frac{F(z,t,\mu,f)}{g}\,dz_1\ldots dz_N\,d\mu,$$

$$g\equiv(z_1-x_1)\ldots(z_j-x_j)^{2+\delta_{jk}}\ldots(z_k-x_k)^{2-2\delta_{jk}}\ldots(\mu-\varepsilon),$$

$$\delta_{jk}\equiv\begin{cases}0, & j\neq k,\\ 1, & j=k,\end{cases}$$

$$\oint\limits_1\equiv\int\limits_{|\mu|=1+\Delta_\varepsilon}\int\limits_{|z_N|=1+\Delta_\delta}\ldots\int\limits_{|z_1|=1+\Delta_\delta}.$$

Отсюда и из условия 2.2 об ограниченности функции F следует, что

$$\|F_\varepsilon(x,t,\varepsilon,f)\|\leqslant C,\qquad\left\|\frac{\partial^2F(x,t,\varepsilon,f)}{\partial x_j\partial x_k}\right\|\leqslant C \tag{3.11}$$

при

$$|x_1|\leqslant 1,\quad\ldots\quad|x_N|\leqslant 1,\quad t\in D_t,\quad|\varepsilon|\leqslant 1,\quad f\in D_f.$$

Постоянные в (3.11) не зависят от x, t, ε, f, j, k.

Представим производные из (3.10) по интегральной формуле Коши:

$$F_\varepsilon(x,t,\theta\varepsilon,f)=\frac{1}{(2\pi i)^{N+1}}\oint\limits_2\frac{F_\varepsilon(z,t,\theta\mu,f)\,dz_1\ldots dz_N\,d\mu}{(z_1-x_1)\ldots(z_N-x_N)(\mu-\varepsilon)},$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial x\partial x_j}(\theta\theta_1x,t,0,f)=\frac{1}{(2\pi i)^N}\oint\limits_3\frac{\partial^2F/\partial x\partial x_j(\theta\theta_1z,t,0,f)dz_1\ldots dz_N}{(z_1-x_1)\ldots(z_N-x_N)},$$

$$\oint\limits_2\equiv\int\limits_{|\mu|=1}\int\limits_{|z_N|=1}\ldots\int\limits_{|z_1|=1},\qquad\oint\limits_3\equiv\int\limits_{|z_N|=1}\ldots\int\limits_{|z_1|=1}.$$

Отсюда и из неравенств (3.11) получим мажорантные ряды для компонент производных

$$F_\varepsilon(x,t,\theta\varepsilon,f)\ll\frac{C}{(1-x_1-\ldots-x_N)\,(1-\varepsilon)}(\arg x,\varepsilon),$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial x_k\,\partial x_j}(\theta\theta_1x,t,0,f)\ll\frac{C}{1-x_1-\ldots-x_N}\,(\arg x),$$

$$k=\overline{1,N},\quad j=\overline{1,N}.$$

Постоянные C в мажорантных рядах не зависят от x, t, ε, f, θ, θ_1, k, j. Отсюда и из (3.11) следует формула для мажоранты функции G:

$$G(x,t,\varepsilon,f) \ll \varphi(x,\varepsilon) \equiv$$
$$\equiv \frac{K_1}{1-x_1-\ldots-x_N}\left[(x_1+\ldots+x_N)^2+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right](\arg x,\varepsilon). \qquad (3.12)$$

Формула справедлива при $t \in D_t$, $f \in D_f$. Постоянная K_1 не зависит от x, t, ε, f.

3.4. Оценка интеграла

Рассмотрим интеграл

$$g_1(t,\mu) \equiv K_1 \int\limits_0^t \|U(t,s,\mu)\|\,ds \qquad (3.13)$$

на множестве (3.5). Из (2.3)–(2.5) и из непрерывности по t, s матрицы $U(t,s,\mu)$ в теореме 2.1 следуют неравенства

$$g_1(t,\mu) \leqslant \begin{cases} K_1 \int\limits_0^t C\,ds & \text{для теоремы 2.1,}\\ K_1 \int\limits_0^t Ce^{-\kappa(t-s)}\,ds & \text{для теоремы 2.2,}\\ K_1 \int\limits_0^t [C^\circ(t-s)^\kappa + C]\,ds & \text{для теоремы 2.3,}\\ K_1 \int\limits_0^t Ce^{\kappa(t-s)}\,ds & \text{для теоремы 2.4,} \end{cases} \qquad (3.14)$$

$$g_1(t,\mu) \leqslant K_2(t), \quad K_2(t) \equiv \begin{cases} C & \text{для теорем 2.1, 2.2,}\\ Ct^{\kappa+1}+C & \text{для теоремы 2.3,}\\ C\exp\{\kappa t\} & \text{для теоремы 2.4.}\end{cases}$$

Функция $K_2(t)$ не зависит от μ.

3.5. Решение алгебраической задачи

$$v_l = \varphi_1(v,t,\varepsilon), \quad l=\overline{1,N},$$
$$\varphi_1(v,t,\varepsilon) \equiv \frac{K_2(t)}{1-v_1-\ldots-v_N}\left[(v_1+\ldots+v_N)^2+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]. \qquad (3.15)$$

Из (3.15) следует

$$v_1 = \ldots = v_N = v,$$

$$-v(1 - Nv) + K_2\left(N^2v^2 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) = v,$$

$$v = \frac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{2N(1 + K_2N)}, \quad \Delta \equiv 1 - \frac{4K_2N\varepsilon(1 + K_2N)}{1 - \varepsilon}.$$

Рассмотрим решение задачи (3.15), обращающееся в ноль при $\varepsilon = 0$:

$$v_1 = \ldots = v_N = \psi(t, \varepsilon),$$

$$\psi(t, \varepsilon) \equiv \frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2N(1 + K_2N)} = \frac{2K_2\varepsilon}{(1 - \varepsilon)(1 + \sqrt{\Delta})}. \tag{3.16}$$

Из (3.14), (3.16) следует, что при всех $t \in D_t$ функция $\psi(t, \varepsilon)$ аналитична в точке $\varepsilon = 0$. Поэтому решение (3.16) представимо в виде сходящегося ряда

$$v_l(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} v_l^{(j)}(t)\varepsilon^j, \quad v_l^{(0)}(t) = 0, \quad l = \overline{1, N}. \tag{3.17}$$

Введем функцию

$$K_3(t) \equiv \begin{cases} C & \text{для теорем 2.1, 2.2,} \\ Ct^{2(\kappa+1)} + C & \text{для теоремы 2.3,} \\ Ce^{2\kappa t} & \text{для теоремы 2.4.} \end{cases} \tag{3.18}$$

Выберем постоянные в формуле для $K_2(t)$ так, чтобы при

$$t \in D_t, \quad |\nu| \leqslant 1, \quad \nu \in \mathbf{C} \tag{3.19}$$

выполнялись неравенства

$$K_3(t) > 1, \quad \left|\frac{4K_2(t)N\nu[1 + K_2(t)N]}{K_3(t) - \nu}\right| \leqslant C < 1,$$

$$|1 + \sqrt{\Delta'}| \geqslant C > 0, \quad \Delta' \equiv 1 - \frac{4K_2N\nu(1 + K_2N)}{K_3 - \nu}.$$

Тогда на множестве (3.19) аналитична по ν и ограничена функция

$$\psi'(t, \nu) \equiv \frac{2K_2(t)}{[K_3(t) - \nu](1 + \sqrt{\Delta'})}. \tag{3.20}$$

Из интегральной формулы

$$\psi'(t, \nu) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=1} \frac{\psi'(t, \lambda)d\lambda}{\lambda - \nu}$$

и из ограниченности $\psi'(t,\lambda)$ получим мажорирующий ряд

$$\psi'(t,\nu) \ll \frac{C}{1-\nu}\,(\arg\nu), \tag{3.21}$$

где C не зависит от t, ν. Из (3.16), (3.19) следует формула

$$\psi(t,\varepsilon) = \nu\psi'(t,\nu)\big|_{\nu=\varepsilon K_3(t)}.$$

Из нее и из (3.21)

$$v_l(t,\varepsilon) = \psi(t,\varepsilon) \ll \frac{CK_3(t)\varepsilon}{1-K_3(t)\varepsilon}\,(\arg\varepsilon), \quad t\in D_t, \quad l=\overline{1,N}.$$

Таким образом, ряд (3.17) сходится к решению задачи (3.15) при $t\in D_t$, $|\varepsilon| < K_3^{-1}(t)$.

Введем функцию

$$t_*(\varepsilon) \equiv \begin{cases} T & \text{для теоремы 2.1,}\\ \infty & \text{для теоремы 2.2,}\\ T\varepsilon^{-\chi} & \text{для теоремы 2.3,}\\ T-\chi\ln\varepsilon & \text{для теоремы 2.4.}\end{cases}$$

Здесь T, χ — постоянные из теорем 2.1–2.4. На множестве $0\leqslant t\leqslant t_*(\varepsilon)$ из (3.18) следуют соотношения

$$K_3(t)\varepsilon \leqslant \begin{cases} C\varepsilon & \text{для теорем 2.1, 2.2,}\\ C\varepsilon^{1-2\chi(\kappa+1)} & \text{для теоремы 2.3,}\\ C\varepsilon^{1-2\kappa\chi} & \text{для теоремы 2.4.}\end{cases}$$

Показатели степеней ε положительны, так как по условию теорем 2.3 и 2.4 $0\leqslant\chi<[2(\kappa+1)]^{-1}$ и $0\leqslant\chi<(2\kappa)^{-1}$. Поэтому найдется значение ε_*, не зависящее от t, ε и такое, что $0<\varepsilon_*\leqslant\bar{\varepsilon}$ и ряд (3.17) сходится равномерно к решению задачи (3.15) на множестве

$$0\leqslant t\leqslant t_*(\varepsilon), \quad 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_*.$$

Из (3.15), (3.17) следует, что коэффициенты ряда (3.17) можно найти по формулам

$$v^{(0)}(t)=0, \quad v^{(j)}(t) = \left[\varphi_1\Big(\sum_{i=0}^{j-1} v^{(i)}(t)\varepsilon^i, t, \varepsilon\Big)\right]^{(j)}, \quad j=1,2,\ldots, \tag{3.22}$$

коэффициенты — положительные, неубывающие функции t.

3.6. Мажорирующий ряд для (1.3)

Утверждение 3.3. *На множестве* (3.5) *ряд* (3.17) *мажорирует ряд* (1.3).

Доказательство. Предположим, что на множестве (3.5) при $k=\overline{0,j-1}$ выполняются неравенства

$$|z_l^{(k)}(t,\mu)| \leqslant v_l^{(k)}(t), \quad l=\overline{1,N}. \tag{3.23}$$

Из (1.8) следует формула

$$z^{(j)}(t,\mu)=\int\limits_0^t U(t,s,\mu)F^{(j)}(s,\mu)\,ds.$$

Отсюда и из (1.7), (3.8), (3.12)–(3.15), (3.22) следуют неравенства

$$\left|z_l^{(j)}(t,\mu)\right| \leqslant \left\|z^{(j)}(t,\mu)\right\| \leqslant \int\limits_0^t \|U(t,s,\mu)\|\cdot\|F^{(j)}(s,\mu)\|\,ds,$$

$$F^{(j)}(t,\mu)=\left[F\left(\sum_{i=0}^{j-1} z^{(i)}(t,\mu)\varepsilon^i, t,\varepsilon, f(t,\mu)\right)\right]^{(j)} =$$

$$=\left[G\left(\sum_{i=0}^{j-1} z^{(i)}(t,\mu)\varepsilon^i, t,\varepsilon, f(t,\mu)\right)\right]^{(j)}, \quad j\geqslant 1,$$

$$\left\|F^{(j)}(t,\mu)\right\| \leqslant \left[\varphi\left(\sum_{i=0}^{j-1} z^{(i)}(t)\varepsilon^i,\varepsilon\right)\right]^{(j)},$$

$$\left|z_l^{(j)}(t,\mu)\right| \leqslant \int\limits_0^t \|U(t,s,\mu)\|\cdot\left[\varphi\left(\sum_{i=0}^{j-1} z^{(i)}(s)\varepsilon^i,\varepsilon\right)\right]^{(j)} ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t \|U(t,s,\mu)\|\,ds\cdot\left[\varphi\left(\sum_{i=0}^{j-1} z^{(i)}(t)\varepsilon^i,\varepsilon\right)\right]^{(j)} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\varphi_1\left(\sum_{i=0}^{j-1} v^{(i)}(t)\varepsilon^i, t,\varepsilon\right)\right]^{(j)} = v^{(j)}(t).$$

Здесь использована монотонность положительных функций $v^{(i)}(t)$. Таким образом, получили: если неравенства (3.23) выполняются при $k=\overline{0,j-1}$, то они выполняются и при $k=j$. Так как $z^{(0)}(t,\mu)=v^{(0)}(t)=0$, то отсюда по индукции получаем, что неравенство (3.23) выполняется для всех $k\geqslant 0$. □

Из утверждения 3.3 следует, что ряд (1.3) сходится равномерно на множестве

$$0\leqslant t\leqslant t_*(\varepsilon), \quad 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_*, \quad 0<\mu\leqslant\overline{\varepsilon}. \tag{3.24}$$

3.7. Сумма ряда (1.3)

Утверждение 3.4. *Сумма ряда* (1.3) *является решением задачи* (1.2) *на множестве* (3.24).

Доказательство. Запишем задачу (1.2) в виде

$$\frac{dz}{dt} = A(t,\mu)z + G(z,t,\varepsilon,f(t,\mu)), \quad z|_{t=0} = 0.$$

Отсюда видно, что задача (1.2) эквивалентна интегральному уравнению

$$z(t,\varepsilon,\mu) = \int_0^t U(t,s,\mu)\cdot G\big(z(s,\varepsilon,\mu),s,\varepsilon,f(s,\mu)\big)\,ds. \tag{3.25}$$

Функция $G(x,t,\varepsilon,f)$, как следует из формулы (3.8) и из условия 2.2, аналитична по x, ε на множестве (3.3), $x\in\mathbf{C}^N$, $\varepsilon\in\mathbf{C}$. Отсюда, из (1.3), (3.12) следует: имеет место представление

$$G(z(t,\varepsilon,\mu),t,\varepsilon,f(t,\mu)) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(t,\mu)\varepsilon^k. \tag{3.26}$$

На множестве (3.24) ряд (3.26) сходится равномерно, члены ряда (3.26) непрерывны по t. Поэтому подынтегральное выражение в (3.25) разлагается в ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k(t,s,\mu)\varepsilon^k, \quad h_k(t,s,\mu) \equiv \int_0^t U(t,s,\mu)\cdot G_k(s,\mu)\,ds, \tag{3.27}$$

удовлетворяющий условиям почленного интегрирования: при $0\leqslant s\leqslant t$ члены ряда непрерывны по s и ряд сходится равномерно. Это означает, что интеграл от суммы ряда (3.27) равен сумме от интегралов его членов. Последняя сумма равна сумме ряда (1.3), как следует из формулы (1.8).

Таким образом, сумма ряда (1.3) является решением задачи (3.25) (а значит и задачи (1.2)) на множестве (3.24). □

3.8. Завершение доказательства теорем 2.1–2.4

Из (1.1), (1.2) следует равенство $x(t,\varepsilon) = z(t,\varepsilon,\varepsilon)$. Поэтому на множестве $0\leqslant t\leqslant t_*(\varepsilon)$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_*$ ряд (1.10) равномерно сходится к решению задачи (1.1). Единственность решения следует из локального условия Липшица по x, которому удовлетворяет правая часть уравнения (1.1) в области определения. Теоремы 2.1–2.4 доказаны.

§ 4. Доказательство теорем 2.5–2.8

4.1. Коэффициенты ряда (1.3)

Утверждение 4.1. *Функции $z^{(k)}(t, \mu)$ существуют, единственны, непрерывно дифференцируемы по t и удовлетворяют соотношениям*

$$z^{(0)}(t, \mu) = 0, \quad \|z^{(k)}(t, \mu)\| \leqslant g_k(t), \quad k = \overline{1, n} \tag{4.1}$$

при

$$t \in D_t, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}, \tag{4.2}$$

$$g_k(t) \equiv \begin{cases} C & \text{для теорем 2.5, 2.6,} \\ Ct^{(k+1)(2k-1)} + C & \text{для теоремы 2.7,} \\ Ce^{k\varkappa t} & \text{для теоремы 2.8,} \end{cases}$$

$$D_t \equiv \begin{cases} \{t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\} & \text{для теоремы 2.5,} \\ \{t\colon\ t \geqslant 0\} & \text{для теорем 2.6–2.8.} \end{cases}$$

Доказательство. Из условия 2.1 следует, что $z^{(0)}(t, \mu) = 0$. Единственность этого решения следует из локального условия Липшица по z, которому удовлетворяет функция $F(z, t, 0, f(t, \mu))$ при $\|z\| \leqslant \delta$ на множестве (4.2). Таким образом, утверждение 4.1 при $k = 0$ доказано.

Предположим, что при $j = \overline{0, k-1}$ на множестве (4.2) функции $z^{(j)}(t, \mu)$ существуют, единственны, непрерывно дифференцируемы по t и удовлетворяют неравенствам

$$\|z^{(j)}(t, \mu)\| \leqslant g_j(t). \tag{4.3}$$

Рассмотрим задачу (1.6) для $z^{(k)}(t, \mu)$.

Из (1.7) следует, что $F^{(k)}(t, \mu)$ имеет вид

$$F^{(1)}(t,\mu) = F_\varepsilon\bigl(0,t,0,f(t,\mu)\bigr),$$

$$\begin{gathered} F^{(k)}(t,\mu) = \Biggl\{ \sum_{m_1+\ldots+m_{N+1}=1}^{k} C \frac{\partial^{m_1+\ldots+m_{N+1}} F}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_N^{m_N} \partial \varepsilon^{m_{N+1}}} \bigl(0,t,0,f(t,\mu)\bigr) \times \\ \times \prod_{l=1}^{N} \Biggl[\sum_{j=1}^{k-1} z_l^{(j)}(t,\mu) \varepsilon^j \Biggr]^{m_l} \varepsilon^{m_{N+1}} \Biggr\}^{(k)} \quad \text{при} \quad k \geqslant 2. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Из формул (4.4), из условий 2.3, 2.4, из сделанного предположения следует: $F^{(k)}(t, \mu)$ непрерывны по t на множестве (4.2).

Из (2.2) следует, что $A(t, \mu)$ непрерывна по t на множестве (4.2),

$$A(t, \mu) = F_x(0, t, 0, f(t, \mu)). \tag{4.5}$$

По теореме о решении линейной задачи Коши $z^{(k)}(t, \mu)$, как решение задачи (1.6), существует, единственно, непрерывно дифференцируемо по t на множестве (4.2).

Перейдем к оценке $z^{(k)}(t, \mu)$ на множестве (4.2). Из (4.4) и из условий 2.3, 2.4 следует:

$$\|F^{(1)}(t, \mu)\| \leqslant C. \tag{4.6}$$

Из (4.6), условий 2.3, 2.4 и из предположения следует неравенство

$$\|F^{(k)}(t, \mu)\| \leqslant C \quad \text{для теорем 2.5, 2.6.} \tag{4.7}$$

Чтобы получить оценку для теорем 2.7, 2.8, заметим, что в (4.4) $F^{(k)}(t, \mu)$ — линейная комбинация производных от F, ограниченных по норме по условиям 2.3, 2.4. Коэффициенты в линейной комбинации — суммы произведений

$$\Pi_1 = \prod_{l=1}^{N} \prod_{j=1}^{k-1} \left[z_l^{(j)}(t, \mu)\right]^{s_{lj}} \tag{4.8}$$

с постоянными коэффициентами. Здесь

$$s_{lj} \geqslant 0, \quad \Sigma_1 \equiv \sum_{l=1}^{N} \sum_{j=1}^{k-1} j s_{lj} \leqslant k. \tag{4.9}$$

Для теоремы 2.7: если $\Sigma_2 \equiv \sum\limits_{l=1}^{N} \sum\limits_{j=1}^{k-1} s_{lj} = 0$, то все $s_{lj} = 0$ и

$$\Pi_1 = 1; \tag{4.10}$$

если $\Sigma_2 = 1$, то лишь для одной пары значений $l = l_*$, $j = j_*$ справедливо равенство $s_{l_* j_*} = 1$. Остальные числа $s_{lj} = 0$. Поэтому

$$\Pi_1 = z_{l_*}^{(j_*)}(t, \mu), \tag{4.11}$$

$$|\Pi_1| \leqslant \left\|z^{(j_*)}(t, \mu)\right\| \leqslant Ct^{(\kappa+1)(2j_*-1)} + C \leqslant Ct^{(\kappa+1)(2k-3)} + C.$$

При $\Sigma_2 \geqslant 2$

$$|\Pi_1| \leqslant \prod_{l=1}^{N} \prod_{j=1}^{k-1} \left\|z^{(j)}(t,\mu)\right\|^{s_{lj}} \leqslant \prod_{l=1}^{N} \prod_{j=1}^{k-1} \left[Ct^{(\kappa+1)(2j-1)} + C\right]^{s_{lj}} \leqslant Ct^{\Sigma_3} + C,$$

$$\begin{aligned} \Sigma_3 \equiv \sum_{l=1}^{N} \prod_{j=1}^{k-1} (\kappa+1)(2j-1)s_{lj} \leqslant (\kappa+1)(2\Sigma_1 - \Sigma_2) \leqslant \\ \leqslant (\kappa+1)(2k-2) = 2(\kappa+1)(k-1), \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$|\Pi_1| \leqslant Ct^{2(\kappa+1)(k-1)} + C.$$

Отсюда и из (4.6), (4.10), (4.11) следует оценка

$$\|F^{(k)}(t, \mu)\| \leqslant Ct^{2(\kappa+1)(k-1)} + C \quad \text{для теоремы 2.7.} \tag{4.13}$$

Для теоремы 2.8 из (4.1), (4.3), (4.8), (4.9) следуют неравенства

$$|\Pi_1| \leqslant \prod_{l=1}^{N}\prod_{j=1}^{k-1} \left\|z^{(j)}(t,\mu)\right\|^{s_{lj}} \leqslant \prod_{l=1}^{N}\prod_{j=1}^{k-1} \left(Ce^{j\varkappa t}\right)^{s_{lj}} = Ce^{\varkappa \Sigma_l t} \leqslant Ce^{k\varkappa t},$$
$$\left\|F^{(k)}(t,\mu)\right\| \leqslant Ce^{k\varkappa t} \quad \text{при} \quad k \geqslant 2. \tag{4.14}$$

Рассмотрим $z^{(k)}(t,\mu)$. Из формулы (1.8) следует неравенство

$$\|z_k(t,\mu)\| \leqslant \int_0^t \|U(t,s,\mu)\| \cdot \|F^{(k)}(s,\mu)\|\, ds. \tag{4.15}$$

Для теоремы 2.5: $\|A(t,\mu)\| \leqslant C$ при $t \in D_t$, $0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}$ (по условиям 2.3, 2.4). Поэтому $\|U(t,s,\mu)\| \leqslant C$ при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}$ и

$$\|z_k(t,\mu)\| \leqslant C \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}.$$

Для теоремы 2.6:

$$\|z_k(t,\mu)\| \leqslant \int_0^t C\, e^{-\varkappa(t-s)}\, ds \leqslant C.$$

Для теоремы 2.7:

$$\|z_k(t,\mu)\| \leqslant \int_0^t \left[C(t-s)^{\varkappa} + C\right]\left[Cs^{2(\varkappa+1)(k-1)} + C\right] ds \leqslant C\, t^{(\varkappa+1)(2k-1)} + C.$$

Для теоремы 2.8:

$$\|z_k(t,\mu)\| \leqslant \begin{cases} \displaystyle\int_0^t Ce^{\varkappa(t-s)}\, ds & \text{при} \quad k=1, \\ \displaystyle\int_0^t C\exp\{\varkappa(t-s) + k\varkappa s\}\, ds & \text{при} \quad k \geqslant 2, \end{cases}$$

$$\|z_k(t,\mu)\| \leqslant C\, e^{k\varkappa t} \quad \text{при} \quad k \geqslant 1.$$

Здесь использованы неравенства (2.3)–(2.5) для U и (4.6), (4.7), (4.13), (4.14) для $F^{(k)}$.

Таким образом, при сделанном предположении получили, что для функции $z^{(k)}(t,\mu)$ справедливо утверждение 4.1. Так как для $k=0$ утверждение 4.1 доказано, то по индукции утверждение 4.1 имеет место для всех $k = \overline{0,n}$. □

4.2. Введение вспомогательной переменной

Обозначим

$$u = z - Z_n(t, \varepsilon, \mu), \quad Z_n(t, \varepsilon, \mu) \equiv \sum_{k=0}^{n} z^{(k)}(t, \mu)\varepsilon^k. \tag{4.16}$$

Из (1.2), (1.6) получим уравнения для u:

$$\frac{du}{dt} = A(t, \mu)u + G(u, t, \varepsilon, \mu), \quad u|_{t=0} = 0. \tag{4.17}$$

Здесь

$$G(u, t, \varepsilon, \mu) \equiv F\big(u + Z_n(t, \varepsilon, \mu), t, \varepsilon, f(t, \mu)\big) - \sum_{k=0}^{n} F^{(k)}(t, \mu)\varepsilon^k - \\ - A(t, \mu)Z_n(t, \varepsilon, \mu) - A(t, \mu)u. \tag{4.18}$$

4.3. Функция G, I

Утверждение 4.2. *Найдется такое значение ε_1, $0 < \varepsilon_1 \leqslant \bar{\varepsilon}$, что при*

$$0 \leqslant t \leqslant t_*(\varepsilon), \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon} \tag{4.19}$$

функция $G(0, t, \varepsilon, \mu)$ существует, единственна, непрерывна по t и удовлетворяет неравенству

$$\|G(0, t, \varepsilon, \mu)\| \leqslant g_0(t)\varepsilon^{n+1}, \tag{4.20}$$

где

$$g_0(t) \equiv \begin{cases} C & \text{для теорем 2.5, 2.6,} \\ Ct^{2n(\kappa+1)} + C & \text{для теоремы 2.7,} \\ C & \text{для теоремы 2.8 при } n = 0, \\ Ce^{(n+1)\kappa t} & \text{для теоремы 2.8 при } n \geqslant 1, \end{cases} \tag{4.21}$$

$$t_*(\varepsilon) \equiv \begin{cases} T & \text{для теоремы 2.5,} \\ \infty & \text{для теоремы 2.6,} \\ Te^{-\chi} & \text{для теоремы 2.7,} \\ T - \chi \ln \varepsilon & \text{для теоремы 2.8.} \end{cases}$$

Доказательство. При $n = 0$ из (4.18) следует:

$$G(0, t, \varepsilon, \mu) = F\big(0, t, \varepsilon, f(t, \mu)\big) = \int_0^1 F_\varepsilon\big(0, t, \theta\varepsilon, f(t, \mu)\big)\, d\theta\varepsilon, \\ \|G(0, t, \varepsilon, \mu) \leqslant C\varepsilon, \quad t \in D_t, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}. \tag{4.22}$$

Здесь использованы условия 2.1, 2.3, 2.4. Таким образом, получили неравенство (4.20) при $n = 0$. □

При $n \geqslant 1$ из (4.18) следует:

$$G(0,t,\varepsilon,\mu) = F\big(Z_n(t,\varepsilon,\mu),t,\varepsilon,f(t,\mu)\big) - \sum_{k=0}^{n} F^{(k)}(t,\mu)\varepsilon^k - A(t,\mu)Z_n(t,\varepsilon,\mu) =$$

$$= F\big(Z_n(t,\varepsilon,\mu),t,\varepsilon,f(t,\mu)\big) - [F(Z_n(t,\varepsilon,\mu),t,\varepsilon,f(t,\mu))]^{(\leqslant n)} =$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\partial^{n+1} F\big(Z_n(t,\lambda,\mu),t,\lambda,f(t,\mu)\big)}{\partial \lambda^{n+1}}\bigg|_{\lambda=\theta_1\ldots\theta_{n+1}\varepsilon} \times$$

$$\times\, \theta_2\theta_3^2\ldots\theta_{n+1}^n d\theta_1\ldots d\theta_{n+1}\varepsilon^{n+1}. \tag{4.23}$$

Скобки с верхним индексом $^{(\leqslant n)}$ обозначают частичную сумму разложения функции, стоящей в скобках, в ряд по степеням ε. Частичная сумма содержит степени ε с показателями, меньшими или равными n.

Подынтегральное выражение в (4.23) является линейной комбинацией произведений из следующих сомножителей:

1) $\theta_j, \quad j = \overline{1, n+1}$,

2) $\dfrac{\partial^l F_i(x,t,\lambda,f)}{\partial x^{l_1}\partial\lambda^{l_2}}\bigg|_{x=Z_n(t,\lambda,\mu),f=f(t,\mu),\lambda=\theta_1\ldots\theta_{n+1}\varepsilon}, \quad l = l_1 + l_2 \leqslant n+1,$

3) $$\Pi \equiv \prod_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{N}\left[\sum_{q=k}^{n} z_l^{(q)}(t,\mu)q![(q-k)!]^{-1}\varepsilon^{q-k}\right]^{s_{kl}}, \quad s_{kl} \geqslant 0, \tag{4.24}$$

$$\Sigma_1 \equiv \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{N} k s_{kl} \leqslant n+1.$$

Оценим $Z_n(t,\varepsilon,\mu)$ на множестве (4.19). Из (4.1), (4.16) следует:

$$Z_0(t,\varepsilon,\mu) = 0 \quad \text{при} \quad n = 0; \tag{4.25}$$

$$\|Z_n(t,\varepsilon,\mu)\| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\big\|z^{(k)}(t,\mu)\big\|\varepsilon^k \leqslant \sum_{k=1}^{n} g_k(t)\varepsilon^k \quad \text{при} \quad n \geqslant 1; \tag{4.26}$$

$$\|Z_n(t,\varepsilon,\mu)\| \leqslant C\varepsilon$$

при $t \in D_t$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \bar\varepsilon$, $0 < \mu \leqslant \bar\varepsilon$ для теорем 2.5, 2.6;

$$\|Z_n(t,\varepsilon,\mu)\| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\big[Ct^{(\kappa+1)(2k-1)} + C\big]\varepsilon^k \leqslant \sum_{k=1}^{n} C\varepsilon^{k-\chi(\kappa+1)(2k-1)} \leqslant C\varepsilon^{1-\chi(\kappa+1)}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-\chi}$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \bar\varepsilon$, $0 < \mu \leqslant \bar\varepsilon$ для теоремы 2.7;

$$\|Z_n(t,\varepsilon,\mu)\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} Ce^{k\kappa t}\varepsilon^k \leqslant \sum_{k=1}^{n} C\varepsilon^{k(1-\chi\kappa)} \leqslant C\varepsilon^{1-\chi\kappa}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T - \chi\ln\varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon$, $0 < \mu \leqslant \varepsilon$ для теоремы 2.8.

Так как $0 \leqslant \chi < [2(\kappa+1)]^{-1}$ для теоремы 2.7 и $0 \leqslant \chi < (n+1)[(n+2)\kappa]^{-1}$ для теоремы 2.8, то найдется такое значение ε_1, $0 < \varepsilon_1 \leqslant \bar{\varepsilon}$, что на множестве (4.19)

$$\|Z_n(t,\varepsilon,\mu)\| \leqslant \delta \quad \text{при} \quad n \geqslant 0. \tag{4.27}$$

Отсюда и из условий 2.3, 2.4 следует, что производные (4.23) ограничены по норме на множестве (4.19) при $0 \leqslant \theta_j \leqslant 1$, $j = \overline{1, n+1}$.

Оценим П на множестве (4.19). Из (4.23) следует, что

$$|\Pi| \leqslant \prod_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{N}\left[\sum_{q=k}^{n} C\varepsilon^{q-k}\right]^{s_{kl}} \leqslant C \quad \text{для теорем 2.5. 2.6.} \tag{4.28}$$

Для теоремы 2.7:

$$\begin{gathered}|\Pi| \leqslant \prod_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{N}\left[\sum_{q=k}^{n}[Ct^{(\kappa+1)(2q-1)} + C]\varepsilon^{q-k}\right]^{s_{kl}} \leqslant \\ \leqslant \prod_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{N}\left[Ct^{(\kappa+1)(2k-1)}\sum_{q=0}^{n-k}[t^{2(\kappa+1)}\varepsilon]^q + C\right]^{s_{kl}}, \\ t^{2(\kappa+1)}\varepsilon \leqslant C\varepsilon^{1-2\chi(\kappa+1)} \leqslant C, \\ |\Pi| \leqslant \prod_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{N}[Ct^{(\kappa+1)(2k-1)} + C]^{s_{kl}} \leqslant Ct^{2n(\kappa+1)} + C.\end{gathered} \tag{4.29}$$

Последнее неравенство получается так же, как неравенство (4.12).

Для теоремы 2.8:

$$\begin{gathered}|\Pi| \leqslant \prod_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{N}\left[\sum_{q=k}^{n} Ce^{q\kappa t}\varepsilon^{q-k}\right]^{s_{kl}} \leqslant \prod_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{N}\left[Ce^{k\kappa t}\sum_{q=0}^{n-k} e^{q\kappa t}\varepsilon^{q}\right]^{s_{kl}}, \\ e^{q\kappa t}\varepsilon^q \leqslant C\varepsilon^{q(1-\chi\kappa)} \leqslant C, \\ |\Pi| \leqslant \prod_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{N}(Ce^{k\kappa t})^{s_{kl}} \leqslant C\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{N} k s_{kl}\kappa t\right\} \leqslant Ce^{(n+1)\kappa t}.\end{gathered} \tag{4.30}$$

Из полученных для П неравенств (4.27)–(4.30) и из представления подынтегрального выражения (4.23) в виде линейной комбинации следуют неравенства (4.20).

Существование, единственность, непрерывность по t функции $G(0,t,\varepsilon,\mu)$ следует из формул (4.22), (4.23), неравенства (4.27), условий 2.3, 2.4, утверждения 4.1. . □

4.4. Функция G, II

Утверждение 4.3. *Найдутся такие значения $\widetilde{\delta}$, ε_2, что $\widetilde{\delta} > 0$, $0 < \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1$ и при*

$$\|u\| \leqslant \widetilde{\delta}, \quad \|\widetilde{u}\| \leqslant \widetilde{\delta}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_*(\varepsilon), \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_2, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon} \tag{4.31}$$

функция $G(u, t, \varepsilon, \mu)$ существует, единственна, непрерывна по u, t и удовлетворяет неравенству

$$\|G(u, t, \varepsilon, \mu) - G(\widetilde{u}, t, \varepsilon, \mu)\| \leqslant [L(t, \varepsilon) + \|u\| + \|\widetilde{u}\|]\, \|u - \widetilde{u}\|,$$

$$L(t, \varepsilon) \equiv \begin{cases} C\varepsilon & \text{для теорем 2.5, 2.6,} \\ & \text{и при } n = 0 \text{ для теорем 2.7, 2.8,} \\ \varepsilon(Ct^{\kappa+1} + C) & \text{для теоремы 2.7 при } \quad n \geqslant 1, \\ C\varepsilon \exp\{\kappa t\} & \text{для теоремы 2.8 при } \quad n \geqslant 1. \end{cases} \tag{4.32}$$

Доказательство. Из соотношений (4.25), (4.26) для $Z_n(t, \varepsilon, \mu)$ следует, что найдутся такие значения $\widetilde{\delta}$, ε_2, что $\widetilde{\delta} > 0$, $0 < \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1$ и на множестве (4.31)

$$\|u + Z_n(t, \varepsilon, \mu)\| \leqslant \|u\| + \|Z_n(t, \varepsilon, \mu)\| \leqslant \widetilde{\delta} + \|Z_n(t, \varepsilon, \mu)\| \leqslant \delta. \tag{4.33}$$

Отсюда, из (4.5), (4.18), из условий 2.3, 2.4, из утверждения 4.1, из равенства

$$\sum_{k=0}^{n} F^{(k)}(t, \mu)\varepsilon^k + A(t, \mu) Z_n(t, \varepsilon, \mu) = [F(Z_n(t, \varepsilon, \mu), t, \varepsilon, f(t, \mu)]^{(\leqslant n)}$$

следует существование, единственность, непрерывность по u, t функции $G(u, t, \varepsilon, \mu)$. Оценим $\Delta G \equiv G(u, t, \varepsilon, \mu) - G(\widetilde{u}, t, \varepsilon, \mu)$. Из (4.5), (4.18) следует

$$\begin{aligned} \Delta G = {} & F\big(u + Z_n(t,\varepsilon,\mu), t, \varepsilon, f(t,\mu)\big) - \\ & - F(\widetilde{u} + Z_n(t,\varepsilon,\mu), t, \varepsilon, f(t,\mu)) - F_x(0, t, 0, f(t,\mu)) \cdot (u - \widetilde{u}) = \\ = {} & \int_0^1 F_x\big(Z_n(t,\varepsilon,\mu) + \theta(u - \widetilde{u}) + \widetilde{u}, t, \varepsilon, f(t,\mu)\big)\, d\theta (u - \widetilde{u}) - \\ & - F_x\big(0, t, 0, f(t,\mu)\big) \cdot (u - \widetilde{u}) = \\ = {} & \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} F_x\big(\theta_1 Z_n(t,\varepsilon,\mu) + \theta\theta_1(u - \widetilde{u}) + \\ & + \theta_1 \widetilde{u}, t, \theta_1\varepsilon, f(t,\mu)\big)\, d\theta_1\, d\theta (u - \widetilde{u}) = \\ = {} & \int_0^1 \int_0^1 \Big\{ \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial^2 F(x, t, \lambda, f)}{\partial x \partial x_l} [Z_{nl}(t, \varepsilon, \mu) + \theta u_l - \theta \widetilde{u}_l + \widetilde{u}_l] + \\ & + F_{x\lambda}(x, t, \lambda, f)\varepsilon \Big\}_{x = \bar{x},\ \lambda = \theta_1\varepsilon,\ f = f(t,\mu)} d\theta_1\, d\theta (u - \widetilde{u}). \end{aligned} \tag{4.34}$$

Здесь
$$\bar{x} = \theta_1 Z_n(t, \varepsilon, \mu) + \theta\theta_1(u - \widetilde{u}) + \theta_1\widetilde{u},$$
$$\|\bar{x}\| \leqslant \|Z_n(t, \varepsilon, \mu)\| + \theta\|u\| + (1-\theta)\|\widetilde{u}\| \leqslant \|Z_n(t, \varepsilon, \mu)\| + \widetilde{\delta} \leqslant \delta.$$

Полученное неравенство следует из (4.33). Оно справедливо на множестве (4.31).

Таким образом, производные от F под интегралом в (4.34) ограничены на множестве (4.31) по условиям 2.3, 2.4. На (4.31) имеем:
$$\|\Delta G\| \leqslant [C\|Z_n(t, \varepsilon, \mu)\| + \|u\| + \|\widetilde{u}\| + C\varepsilon]\, \|u - \widetilde{u}\|. \tag{4.35}$$

Из (4.25), (4.26) следует, что
$$\|Z_0(t, \varepsilon, \mu)\| = 0, \quad \|Z_n(t, \varepsilon, \mu)\| \leqslant C\varepsilon$$
для теорем 2.5, 2.6, $n \geqslant 1$;
$$\|Z_n(t, \varepsilon, \mu)\| \leqslant Ct^{\kappa+1}\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} t^{(\kappa+1)2k}\varepsilon^k + C\varepsilon \leqslant \varepsilon(Ct^{\kappa+1} + C)$$
для теоремы 2.7, $n \geqslant 1$, так как $\sum\limits_{k=0}^{n-1}[t^{2(\kappa+1)}\varepsilon]^k \leqslant C$ (смотрите (4.29));
$$\|Z_n(t, \varepsilon, \mu)\| \leqslant Ce^{\kappa t}\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} e^{k\kappa t}\varepsilon^k \leqslant C\varepsilon e^{\kappa t}$$
для теоремы 2.8, $n \geqslant 1$, так как $\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{k\kappa t}\varepsilon^k \leqslant C$ (смотрите (4.30)).

Отсюда и из (4.35) следуют неравенства (4.32). □

4.5. Применение теоремы 2.10 к задаче (4.17)

Для любых значений ε, μ $(0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_2,\ 0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon})$ задача (4.17) удовлетворяет условиям теоремы 2.10, в которой нужно положить
$$\delta = \widetilde{\delta}, \quad t_* = t_*(\varepsilon), \quad L_1(t) = L(t, \varepsilon), \quad L_2(t) = 1, \quad U(t, s) = U(t, s, \mu). \tag{4.36}$$
$t_*(\varepsilon)$, $L(t, \varepsilon)$ задаются формулами (4.21), (4.32). По теореме 2.10 решение задачи (4.17) существует, единственно и удовлетворяет неравенству (2.9) при t, ε, μ из множества (2.10).

Рассмотрим функции a, b, c. При $0 \leqslant t \leqslant t_*(\varepsilon)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_2$, $0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}$ из (2.3)–(2.5), (2.8), (4.20) следует:
$$a = a(t, \varepsilon, \mu) = \max_{0 \leqslant q \leqslant t} \int_0^q \|U(q, s, \mu)\| \cdot G(0, s, \varepsilon, \mu)\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \max_{0 \leqslant q \leqslant t} \int_0^q \|U(q, s, \mu)\| \cdot g_0(s)\, ds\, \varepsilon^{n+1}.$$

$$a(t,\varepsilon,\mu) \leqslant \begin{cases} Ct\varepsilon^{n+1} \text{ для теоремы 2.5,} \\ C\varepsilon^{n+1}(1-e^{-\kappa t}) \text{ для теоремы 2.6,} \\ \max\limits_{0\leqslant q\leqslant t} \int\limits_0^q \left[C(q-s)^{\kappa}+C\right]\left[Cs^{2n(\kappa+1)}+C\right] ds\varepsilon^{n+1} \leqslant \\ \quad \leqslant \left[Ct^{(2n+1)(\kappa+1)}+Ct\right]\varepsilon^{n+1} \text{ для теоремы 2.7,} \\ \max\limits_{0\leqslant q\leqslant t} \int\limits_0^q C\exp\left\{\kappa(q-s)+(n+1)\kappa s\right\} ds\, \varepsilon^{n+1} \leqslant \\ \quad \leqslant C\varepsilon^{n+1}\left[e^{(n+1)\kappa t}-e^{\kappa t}\right] \text{ для теоремы 2.8 при } n\geqslant 1, \\ C\varepsilon\left(e^{\kappa t}-1\right) \text{ для теоремы 2.8 при } n=0. \end{cases}$$

При $0 \leqslant t \leqslant t_*(\varepsilon)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_2$, $0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}$ из (2.3)–(2.5), (2.8), (4.32) следует:

$$b = b(t,\varepsilon) = \max_{0\leqslant q\leqslant t} \int\limits_0^q \|U(q,s,\mu)\| \cdot L(s,\varepsilon)\, ds,$$

$$b(t,\varepsilon) \leqslant \begin{cases} Ct\varepsilon \quad \text{для теоремы 2.5,} \\ \max\limits_{0\leqslant q\leqslant t} \int\limits_0^q Ce^{-\kappa(q-s)}\varepsilon\, ds \leqslant C\varepsilon(1-e^{-\kappa t}) \quad \text{для теоремы 2.6,} \\ \max\limits_{0\leqslant q\leqslant t} \int\limits_0^q \left[C(q-s)^{\kappa}+C\right]\cdot\left(Cs^{\kappa+1}+C\right) ds\varepsilon \leqslant \\ \quad \leqslant \left[Ct^{2(\kappa+1)}+Ct\right]\varepsilon \text{ для теоремы 2.7 при } n\geqslant 1, \\ \max\limits_{0\leqslant q\leqslant t} \int\limits_0^q \left[C(q-s)^{\kappa}+C\right] ds\, \varepsilon \leqslant \left(Ct^{\kappa+1}+Ct\right)\varepsilon \\ \quad \text{для теоремы 2.7 при } n=0, \\ \max\limits_{0\leqslant q\leqslant t} \int\limits_0^q C\exp\left\{\kappa(q-s)+\kappa s\right\} ds\, \varepsilon \leqslant C\varepsilon te^{\kappa t} \\ \quad \text{для теоремы 2.8 при } n\geqslant 1, \\ \max\limits_{0\leqslant q\leqslant t} \int\limits_0^q Ce^{\kappa(q-s)}\, ds\, \varepsilon \leqslant C\varepsilon(e^{\kappa t}-1) \\ \quad \text{для теоремы 2.8 при } n=0. \end{cases}$$

При $t \in D_t$, $0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}$ из (2.3)–(2.5), (2.8), (4.32) следует:

$$c = c(t,\mu) = \max_{0\leqslant q\leqslant t} \int\limits_0^q \|U(q,s,\mu)\|\, ds,$$

$$c(t,\mu) \leqslant \begin{cases} C & \text{для теоремы 2.5,} \\ \max\limits_{0\leqslant q\leqslant t} \int\limits_0^q Ce^{-\kappa(q-s)}\,ds \leqslant C & \text{для теоремы 2.6,} \\ \max\limits_{0\leqslant q\leqslant t} \int\limits_0^q [C(q-s)^\kappa + C]\,ds \leqslant Ct^{\kappa+1} + Ct & \text{для теоремы 2.7,} \\ \max\limits_{0\leqslant q\leqslant t} \int\limits_0^q Ce^{\kappa(q-s)}\,ds \leqslant Ce^{\kappa t} & \text{для теоремы 2.8.} \end{cases}$$

Окончательно получаем: при $0 \leqslant t \leqslant t_*(\varepsilon)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_2$, $0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}$ выполняются неравенства

$$a(t,\varepsilon,\mu) \leqslant a_1(t,\varepsilon), \quad b(t,\varepsilon,\mu) \leqslant b_1(t,\varepsilon), \quad c(t,\mu) \leqslant c_1(t), \tag{4.37}$$

$$a_1(t,\varepsilon) \equiv \begin{cases} Ct\varepsilon^{n+1} & \text{для теоремы 2.5,} \\ C\varepsilon^{n+1}\left(1-e^{-\kappa t}\right) & \text{для теоремы 2.6,} \\ \left[Ct^{(2n+1)(\kappa+1)} + Ct\right]\varepsilon^{n+1} & \text{для теоремы 2.7,} \\ Ce^{\kappa t}\left(e^{n\kappa t}-1\right)\varepsilon^{n+1} & \text{для теоремы 2.8 при } n \geqslant 1, \\ C\varepsilon\left(e^{\kappa t}-1\right) & \text{для теоремы 2.8 при } n = 0, \end{cases}$$

$$b_1(t,\varepsilon) \equiv \begin{cases} Ct\varepsilon & \text{для теоремы 2.5,} \\ C\varepsilon\left(1-e^{-\kappa t}\right), & \text{для теоремы 2.6,} \\ \left[Ct^{2(\kappa+1)} + Ct\right]\varepsilon & \text{для теоремы 2.7,} \\ Cte^{\kappa t}\varepsilon & \text{для теоремы 2.8 при } n \geqslant 1, \\ C\varepsilon\left(e^{\kappa t}-1\right) & \text{для теоремы 2.8 при } n = 0, \end{cases}$$

$$c_1(t) \equiv \begin{cases} C & \text{для теорем 2.5, 2.6,} \\ Ct^{\kappa+1} + Ct & \text{для теоремы 2.7,} \\ Ce^{\kappa t} & \text{для теоремы 2.8.} \end{cases}$$

Из неравенств (4.37) следует, что множество (2.10) содержит подмножество

$$\begin{gathered} p_1(t,\varepsilon) \equiv 1 - b_1(t,\varepsilon) > 0, \\ r_1(t,\varepsilon) \equiv p_1^2(t,\varepsilon) - 4a_1(t,\varepsilon)c_1(t) > 0, \\ 2a_1(t,\varepsilon) < \widetilde{\delta}\,\left[p_1(t,\varepsilon) + \sqrt{r_1(t,\varepsilon)}\right], \\ 0 \leqslant t \leqslant t_*(\varepsilon), \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_2, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}. \end{gathered} \tag{4.38}$$

При $t = 0$ $a_1 = 0$, $b_1 = 0$. Поэтому множество (4.37) не пусто.

При $0 \leqslant t \leqslant t_*(\varepsilon)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_2$ выполняются неравенства

$$a_1(t,\varepsilon) \leqslant \begin{cases} C\varepsilon^{n+1} \quad \text{для теорем 2.5, 2.6} \\ C\varepsilon^{n+1-(2n+1)(\kappa+1)\chi} + C\varepsilon^{n+1-\chi} \leqslant C\varepsilon^{n+1-n-1/2} = C\varepsilon^{1/2} \\ \quad \text{для теоремы 2.7,} \\ C\varepsilon^{n+1-(n+1)\chi\kappa} \leqslant C\varepsilon^{(n+1)[1-(n+1)/(n+2)]} = C\varepsilon^{(n+1)/(n+2)} \\ \quad \text{для теоремы 2.8.} \end{cases}$$

$$b_1(t) \leqslant \begin{cases} C\varepsilon & \text{для теорем 2.5, 2.6} \\ C\varepsilon^{1-2\chi(\kappa+1)} + C\varepsilon^{1-\chi} & \text{для теоремы 2.7,} \\ C\varepsilon^{1-\chi\kappa} - C\varepsilon^{1-\chi\kappa}\ln\varepsilon & \text{для теоремы 2.8,} \end{cases} \tag{4.39}$$

$$a_1(t,\varepsilon)c_1(t) \leqslant \begin{cases} C\varepsilon^{n+1} \quad \text{для теорем 2.5, 2.6} \\ \left[Ct^{2(n+1)(\kappa+1)} + C\right]\varepsilon^{n+1} \leqslant C\varepsilon^{(n+1)[1-2\chi(\kappa+1)]} \\ \quad \text{для теоремы 2.7,} \\ Ce^{(n+2)\kappa t}\varepsilon^{n+1} \leqslant C\varepsilon^{n+1-\chi(n+2)\kappa} \text{ для теоремы 2.8.} \end{cases}$$

Из неравенств для χ, данных в условиях теорем, получаем:
для теоремы 2.7

$$1 - 2\chi(\kappa+1) > 0, \quad 1 - \chi > 1 - [2(\kappa+1)]^{-1} = (2\kappa+1)/[2(\kappa+1)] > 0;$$

для теоремы 2.8

$$1 - \chi\kappa > 1/(n+2) > 0, \quad n + 1 - \chi(n+2)\kappa > 0.$$

Таким образом, в (4.39) показатели степеней ε положительны, правые части малы при малых значениях $|\varepsilon|$. Поэтому найдется такое значение ε_*, что $0 < \varepsilon_* \leqslant \varepsilon_2$ и при $0 \leqslant t \leqslant t_*(\varepsilon)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$, $0 < \mu \leqslant \bar\varepsilon$, неравенства (2.9), (4.38) выполняются и

$$p(t,\varepsilon) + \sqrt{q(t,\varepsilon)} \geqslant p_1(t,\varepsilon) + \sqrt{q_1(t,\varepsilon)} \geqslant C.$$

$$\|u(t,\varepsilon,\mu)\| \leqslant \frac{2a_1(t,\varepsilon)}{p_1(t,\varepsilon) + \sqrt{r_1(t,\varepsilon)}} \leqslant Ca_1(t,\varepsilon).$$

Отсюда, из формулы (4.16), из утверждения 4.1 и теоремы 2.10 получаем:

1) при $0 \leqslant t \leqslant t_*(\varepsilon)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$, $0 < \mu \leqslant \bar\varepsilon$ решение задачи (4.17) существует, единственно и удовлетворяет неравенству $\|u(t,\varepsilon,\mu)\| \leqslant Ca_1(t,\varepsilon)$;
2) при $0 \leqslant t \leqslant t_*(\varepsilon)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$, $0 < \mu \leqslant \bar\varepsilon$ решение задачи (1.2) существует, единственно и удовлетворяет неравенству $\|z(t,\varepsilon,\mu) - Z_n(t,\varepsilon,\mu)\| \leqslant Ca_1(t,\varepsilon)$;
3) при $0 \leqslant t \leqslant t_*(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ решение задачи (1.1) существует, единственно и удовлетворяет неравенству $\|x(t,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon)\| \leqslant Ca_1(t,\varepsilon)$

Теоремы 2.5–2.8 доказаны.

§ 5. Доказательство теоремы 2.9

5.1. Матрица Коши U, I

Утверждение 5.1. *Матрица $U(t, s, \mu)$ существует, единственна, непрерывна по t, s при*

$$0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}. \tag{5.1}$$

Доказательство дано в п. 3.1. □

5.2. Коэффициенты ряда (1.3)

Утверждение 5.2. *Функции $z^{(k)}(t, \mu)$, $k = 0, 1, \ldots$, существуют, единственны, непрерывно дифференцируемы по t на множестве* (5.1).

Доказательство дано в п. 3.2. □

5.3. Мажоранта для функции F

Доказательство теоремы 2.9 достаточно рассмотреть для случая

$$\delta = 1, \quad \bar{\varepsilon} = 1. \tag{5.2}$$

При других значениях δ, $\bar{\varepsilon}$ можно перейти к (5.2) соответствующим сжатием (или растяжением) x, ε.

Из интегральной формулы Коши (3.2) и из условия 2.1 следует:

$$\begin{aligned} F(x,t,\varepsilon,f) &= F(x,t,\varepsilon,f) - F(0,t,0,f) = \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial\theta} F(\theta x,t,\theta\varepsilon,f)\,d\theta = \\ &= \int\limits_0^1 \left[F_x(\theta x,t,\theta\varepsilon,f)x + F_\varepsilon(\theta x,t,\theta\varepsilon,f)\varepsilon\right] d\theta = \\ &= \int\limits_0^1 \frac{1}{(2\pi i)^{N+1}} \left[\int\limits_1 \frac{F_x(\theta z,t,\theta\mu,f)\,dz_1\ldots dz_N\,d\mu}{(z_1-x_1)\ldots(z_N-x_N)(\mu-\varepsilon)} x + \right. \\ &\quad \left. + \int\limits_1 \frac{F_\varepsilon(\theta z,t,\theta\mu,f)\,dz_1\ldots dz_N\,d\mu}{(z_1-x_1)\ldots(z_N-x_N)(\mu-\varepsilon)} \varepsilon\right] d\theta, \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\int\limits_1 \equiv \int\limits_{|\mu|=1} \int\limits_{|z_N|=1} \ldots \int\limits_{|z_1|=1} .$$

Отсюда получим соотношения

$$
\begin{aligned}
F_q(x,t,\varepsilon,f) &\ll \frac{K(x_1+\ldots+x_N+\varepsilon)}{(1-x_1)\ldots(1-x_N)(1-\varepsilon)}(\arg x,\varepsilon) \ll \\
&\ll \frac{KS}{1-S}(\arg x,\varepsilon) \ll \varphi(x,\varepsilon), \quad q=\overline{1,N}, \\
\varphi(x,\varepsilon) &\equiv \frac{KS(1+S)}{1-S}, \quad S \equiv x_1+\ldots x_N+\varepsilon, \\
K &= \frac{1}{(2\pi i)^{N+1}} \sup_{D_*} \left\{|F_{kx_1}(z,t,\mu,f)|,\ldots,\right. \\
&\qquad \left. |F_{kz_N}(z,t,\mu,f)|, |F_{k\varepsilon}(z,t,\mu,f)|\right\}, \\
D_* &\equiv \left\{z\in \mathbb{C}^N, |z_l| \leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ \mu\in \mathbb{C},\ |\mu|\leqslant 1,\right. \\
&\qquad \left. f\in D_f,\ k=\overline{1,N},\ l=\overline{1,N}\right\}.
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Постоянная K не зависит от x, t, ε, f, μ. Значения t, f принадлежат множеству $0\leqslant t\leqslant T$, $f\in D_f$.

5.4. Исследование вспомогательной задачи

Рассмотрим задачу

$$
\frac{dv_j}{dt} = \varphi(v,\varepsilon), \quad v_j|_{t=0}=0, \quad j=\overline{1,N}. \tag{5.5}
$$

Нетрудно проверить, что задача (5.5) имеет единственное решение

$$
v_1=\ldots=v_N=\frac{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon-\sqrt{\Delta})}{N(1+\varepsilon+\sqrt{\Delta})}, \quad \Delta=(1+\varepsilon)^2-4\varepsilon e^{KNt}. \tag{5.6}
$$

Из формул следует, что v — аналитическая функция в точке $\varepsilon=0$ при любом значении t и, значит, разлагается в сходящийся ряд

$$
v(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty} v^{(k)}(t)\varepsilon^k. \tag{5.7}
$$

Радиус сходимости ряда (5.7) нетрудно найти из (5.6): ряд (5.7) сходится к функции (5.6) при

$$
|\varepsilon| < \widetilde{\varepsilon} \equiv 2e^{KNt}-1-\sqrt{\Delta_1}, \quad \Delta_1 \equiv 4e^{KNt}\left(e^{KNt}-1\right).
$$

Решив неравенство относительно t при $0<\varepsilon<\bar\varepsilon=1$, получим, что ряд (5.7) сходится к функции (5.6) при

$$
0\leqslant t\leqslant T, \quad t<t_{**}\equiv \frac{1}{KN}\ln\frac{(1+\varepsilon)^2}{4\varepsilon}, \quad 0<\varepsilon<\bar\varepsilon=1.
$$

Для любых значений ε, t_* из множества

$$0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon} = 1, \quad 0 < t_* \leqslant T, \quad t_* < \frac{1}{KN} \ln \frac{(1+\varepsilon)^2}{4\varepsilon}$$

ряд (5.7) сходится равномерно к функции (5.6) на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_*$.

Коэффициенты ряда (5.7) — непрерывно дифференцируемые положительные функции t, их можно вычислить по формулам

$$v^{(0)}(t) = 0, \quad v^{(k)}(t) = \int_0^t V(t, s) \cdot l(1) \cdot \varphi_k(s)\, ds, \tag{5.8}$$

$$\varphi_k(t) \equiv \left[\varphi\left(\sum_{j=0}^{k-1} v^{(j)}(t)\varepsilon^j, \varepsilon\right)\right]^{(k)}.$$

Здесь $l(1)$ — столбец из единиц размерности N. $V(t, s)$ — матрица Коши уравнений в вариациях для задачи (5.5). Эти уравнения имеют вид

$$\frac{dq_j}{dt} = K(q_1 + \ldots + q_N), \quad j = \overline{1, N}. \tag{5.9}$$

Матрица Коши соответственно равна

$$V(t, s) = E + \left[e^{KN(t-s)} - 1\right] N^{-1} \widetilde{A}(1), \tag{5.10}$$

$\widetilde{A}(1)$ — матрица размерности $N \times N$, состоящая из единиц.

Первая формула (5.8) следует из (5.6). Вторая формула (5.8) следует из интегрального уравнения

$$v(t, \varepsilon) = \int_0^t V(t, s)\left[\varphi\big(v(s, \varepsilon), \varepsilon\big) \cdot l(1) - A(K) \cdot v(s, \varepsilon)\right] ds,$$

которое эквивалентно задаче (5.5).

5.5. Матрица Коши U, II

Утверждение 5.3. *Элементы матрицы $U(t, s, \mu)$ удовлетворяют неравенствам*

$$|U_{ij}(t, s, \mu)| \leqslant V_{ij}(t, s), \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}. \tag{5.11}$$

Доказательство. Матрицы Коши представимы в виде сходящихся рядов [17]

$$\begin{aligned} U(t, s, \mu) &= E + \int_s^t A(q_1, \mu)\, dq_1 + \int_s^t \int_s^{q_1} A(q_1, \mu) \cdot A(q_2, \mu)\, dq_2 dq_1 + \ldots, \\ V(t, s) &= E + \int_s^t \widetilde{A}(K)\, dq_1 + \int_s^t \int_s^{q_1} \widetilde{A}^2(K)\, dq_2 dq_1 + \ldots \end{aligned} \tag{5.12}$$

Здесь $A(t,\mu)=F_x(0,t,0,f(t,\mu))$. Из (5.4) следуют неравенства $|A_{ij}(t,\mu)|\leqslant K$ при $0\leqslant t\leqslant T$, $0<\mu\leqslant\bar\varepsilon$. Отсюда и из (5.12) получаем (5.11). □

5.6. Мажорирующий ряд для (1.3)

Утверждение 5.4. *При* $0\leqslant t\leqslant T$, $0<\mu\leqslant\bar\varepsilon$ *ряд* (5.7) *является мажорирующим для ряда* (1.3).

Доказательство. Предположим, что для $j=\overline{0,k-1}$, $0\leqslant t\leqslant t_*$, $0<\mu\leqslant\bar\varepsilon$ выполняются неравенства

$$\left|z_i^{(j)}(t,\mu)\right|\leqslant v_i^{(j)}(t),\quad i=\overline{1,N}. \tag{5.13}$$

Тогда при $0\leqslant t\leqslant T$, $0<\mu\leqslant\bar\varepsilon$ из (1.7), (5.4), (5.8) следует:

$$|F_q^{(k)}(t,\mu)|=\left|\left[F_q\left(\sum_{j=0}^{k-1}z^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j,t,\varepsilon,f(t,\mu)\right)\right]^{(k)}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left[\varphi\left(\sum_{j=0}^{k-1}v^{(j)}(t)\varepsilon^j,\varepsilon\right)\right]^{(k)}=\varphi_k(t),\quad q=\overline{1,N}. \tag{5.14}$$

Отсюда и из (1.8), (5.8), (5.11) при $k\geqslant 1$, $0\leqslant t\leqslant T$, $0<\mu\leqslant\bar\varepsilon$ получаем:

$$|z_i^{(k)}(t,\mu)|=\left|\int_0^t\sum_{q=1}^N U_{iq}(t,s,\mu)\cdot F_q^{(k)}(s,\mu)\,ds\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^t\sum_{q=1}^N V_{iq}(t,s)\cdot\varphi_k(s)\,ds=v_i^{(k)}(t),\quad i=\overline{1,N}.$$

Таким образом, при сделанном предположении неравенства (5.13) выполняются и при $j=k$. Так как $z^{(0)}(t,\mu)=v^{(0)}(t)=0$, то, используя математическую индукцию, получаем: при $0\leqslant t\leqslant T$, $0<\mu\leqslant\bar\varepsilon$ и всех $k=0,1,\ldots$

$$|z_i^{(k)}(t,\mu)|\leqslant v_i^{(k)}(t),\qquad i=\overline{1,N}.$$

□

Следствие 5.1. *Ряд* (1.3) *сходится равномерно на множестве* $0\leqslant t\leqslant t_*$ *при любом* ε *из интервала* $0<\varepsilon<\bar\varepsilon=1$.

5.7. Сумма ряда (1.3)

Утверждение 5.5. *Сумма ряда* (1.3) *является решением задачи* (1.2) *на множестве* $0\leqslant t\leqslant t_*$ *при любом* ε *из интервала* $0<\varepsilon<\bar\varepsilon=1$.

Доказательство аналогично доказательству в п. 3.7. □

Теорема 2.9 доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 2.10

Из условий 2.5, 2.7 следует, что для любых T, $0 < T \leqslant t_*$, правые части дифференциальных уравнений (2.6) непрерывны по u, t и удовлетворяют условию Липшица по u при $\|u\| \leqslant \delta$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Отсюда и из теоремы о существовании и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений следует: найдется такое значение t_1, $0 < t_1 \leqslant t_*$, что при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ решение $u = u(t)$ задачи (2.6) существует, единственно, непрерывно по t и удовлетворяет неравенству $\|u\| \leqslant \delta$.

Оценим $u(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Задача (2.6) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t) = U(t,0)\cdot u^\circ + \int\limits_0^t U(t,s)\cdot G(u(s),s)\,ds.$$

Отсюда и из неравенства (2.7) следует:

$$\begin{aligned} \|u(t)\| \leqslant \Big\|U(t,0)\cdot u^\circ + \int\limits_0^t U(t,s)\cdot G(0,s)\,ds\Big\| + {} \\ + \int\limits_0^t \|U(t,s)\|\cdot\|G(u(s),s) - G(0,s)\|\,ds \leqslant {} \\ \leqslant \Big\|U(t,0)\cdot u^\circ + \int\limits_0^t U(t,s)\cdot G(0,s)\,ds\Big\| + {} \\ + \int\limits_0^t \|U(t,s)\|\cdot\big[L_1(s) + L_2(s)\cdot\|u(s)\|\big]\cdot\|u(s)\|\,ds. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Так как

$$\|u(t)\| \leqslant v(t) \equiv \max_{0\leqslant q\leqslant t}\|u(q)\|$$

и так как $v(t)$ — неубывающая положительная функция, то

$$\int\limits_0^t \|U(t,s)\|\cdot L_k(s)\cdot\|u(s)\|^k\,ds \leqslant \int\limits_0^t \|U(t,s)\|\cdot L_k(s)\,ds\cdot v^k(t).$$

Отсюда и из (6.1) получим неравенства

$$v(t) \leqslant a(t) + b(t)v(t) + c(t)v^2(t), \qquad c(t)v^2(t) - [1 - b(t)]v(t) + a(t) \geqslant 0. \tag{6.2}$$

Рассмотрим множество (2.10). Оно не пусто, так как функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ непрерывны по t и $a(0) = \|u^\circ\|$, $b(0) = 0$, $c(0) = 0$. На (2.10) множество неотрицательных значений v, удовлетворяющих неравенству (6.2), распадается на две непересекающиеся компоненты

$$0 \leqslant v(t) \leqslant v_1(t) \equiv \frac{p(t) - \sqrt{r(t)}}{2c(t)} = \frac{2a(t)}{p(t) + \sqrt{r(t)}} \tag{6.3}$$

и

$$v(t) \geqslant v_2(t) \equiv \frac{p(t) + \sqrt{r(t)}}{2c(t)} = \frac{2a(t)}{p(t) - \sqrt{r(t)}}. \tag{6.4}$$

При $t = 0$ имеем:

$$v(0) = \|u^\circ\| = a(0) = v_1(0).$$

Так как множества (6.3), (6.4) не пересекаются и функция $v(t)$ непрерывна по t, то для всех t из множества (2.10) при условии $0 \leqslant t \leqslant t_1$ выполняются неравенства

$$\|u(t)\| \leqslant v(t) \leqslant v_1(t) = \frac{2a(t)}{p(t) + \sqrt{r(t)}}. \tag{6.5}$$

Предположим, что множество (2.10) содержит такую точку t_2, что $t_1 < t_2$. Тогда: 1) (2.10) содержит все точки s, $0 \leqslant s \leqslant t_1$, так как $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — неубывающие функции; 2) $\|u(t_1)\| = \delta$, так как иначе решение $u(t)$ можно было бы продолжить. Отсюда и из (2.10), (6.5) следует:

$$\delta = \|u(t_1)\| \leqslant \frac{2a(t_1)}{p(t_1) + \sqrt{r(t_1)}} < \delta.$$

Пришли к противоречию, из которого следует, что решение задачи Коши (2.6) существует для всех значений t из множества (2.10). Решение единственно и удовлетворяет неравенствам (6.5). Теорема доказана.

§ 7. Доказательство теоремы 2.11

Доказательство теоремы 2.11 аналогично доказательству теоремы Ляпунова при $J = N$ [33] и теоремы Румянцева при $J < N$ [41].

Пусть ε — произвольное число из множества (2.12). По теореме о существовании и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений [4] найдется такое значение $t_* = t_*(\varepsilon) > 0$, что решение задачи (1.1) существует, единственно, непрерывно по t и удовлетворяет неравенству $\|x(t, \varepsilon)\| \leqslant \delta$ при $0 \leqslant t \leqslant t_*$. Покажем, что $\|\widetilde{x}(t, \varepsilon)\| < \delta$ при $0 \leqslant t \leqslant t_*$, $t < \infty$.

Предположим противное. Пусть для некоторого значения $t_1 = t_1(\varepsilon)$ $(0 \leqslant t_1 \leqslant t_*,\ t_1 < \infty)$ $\|\widetilde{x}(t_1, \varepsilon)\| = \delta$. Тогда из условия 2б теоремы 2.11 следует неравенство $\Lambda(x(t_1, \varepsilon), t_1, \varepsilon) \geqslant \rho$. С другой стороны, в силу условия 2а теоремы 2.11 и последнего неравенства (2.12) справедливы

соотношения $\Lambda(x(t_1,\varepsilon),t_1,\varepsilon) \leqslant \Lambda(0,0,\varepsilon) < \rho$. Пришли к противоречию, из которого следует утверждение теоремы о том, что $\|\widetilde{x}(t,\varepsilon)\| < \delta$ при $0 \leqslant t \leqslant t_*$, $t < \infty$.

Пусть $J = N$. Тогда $x = \widetilde{x}$. Предположим, что $t_* < \infty$. Тогда, как доказано, $\|x(t_*,\varepsilon)\| < \delta$. А это означает, что решение можно продолжить. Получили противоречие, из которого следует, что при $J = N$ $t_* = \infty$. Теорема 2.11 доказана.

§ 8. Примеры почти регулярной задачи Коши

Пример 8.1. Рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = \left[1 + a\cos\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right](x+\varepsilon)(-1+x+\varepsilon), \qquad x(0,\varepsilon) = 0, \tag{8.1}$$

где a — постоянная, не зависящая от x, t, ε. Положим $f(t,\varepsilon) = \cos(t/\varepsilon)$ и рассмотрим задачу с двумя малыми параметрами

$$\frac{dz}{dt} = \left[1 + a\cos\left(\frac{t}{\mu}\right)\right](z+\varepsilon)(-1+z+\varepsilon), \qquad z(0,\varepsilon,\mu) = 0. \tag{8.2}$$

Ряд (1.3) для задачи (8.2) имеет вид

$$z = \varepsilon\left(e^{-h} - 1\right) + \sum_{k=2}^{\infty} e^{-h}\left(1 - e^{-h}\right)^{k-1}\varepsilon^k, \qquad h \equiv t + a\mu\sin\left(\frac{t}{\mu}\right).$$

Соответственно ряд (1.10) для задачи (8.1) равен

$$x = \varepsilon\left(e^{-g} - 1\right) + \sum_{k=2}^{\infty} e^{-g}\left(1 - e^{-g}\right)^{k-1}\varepsilon^k, \qquad g \equiv t + a\varepsilon\sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right). \tag{8.3}$$

Задача (8.1) удовлетворяет условиям теорем 2.1–2.8.

По теореме 2.1 для любого значения $T > 0$ найдется постоянная $\varepsilon_* > 0$, не зависящая от t, ε и такая, что на множестве $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ решение задачи (8.1) существует, единственно и представимо в виде равномерно сходящего ряда (8.3).

Уравнение в вариациях для задачи (8.1) имеет вид

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\left[1 + a\cos\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right]\zeta.$$

Матрица Коши равна

$$U(t,s,\mu) = \exp\left\{-t + s - a\mu\sin\left(\frac{t}{\mu}\right) + a\mu\sin\left(\frac{s}{\mu}\right)\right\}.$$

Справедливо неравенство

$$\|U(t,s,\mu)\| \leqslant Ce^{-t+s}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant t, \qquad 0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}, \qquad C \equiv e^{2a\bar{\varepsilon}}.$$

По теореме 2.2 найдется постоянная $\varepsilon_* > 0$, не зависящая от t, ε и такая, что на множестве $t \geqslant 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ решение задачи (8.1) существует, единственно и представимо в виде равномерно сходящего ряда (8.3).

Теоремы 2.3, 2.4 слабее теоремы 2.2, поэтому их не рассматриваем.

По теореме 2.5 для любых значений $T > 0$, $n \geqslant 0$ найдутся постоянные $\varepsilon_* > 0$, C_*, не зависящие от t, ε и такие, что решение задачи (8.1) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|x(t,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon)\| \leqslant C_* t\varepsilon^{n+1}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$,

$$X_0(t,\varepsilon) = 0, \qquad X_1(t,\varepsilon) = \varepsilon\left(e^{-g} - 1\right),$$

$$X_n(t,\varepsilon) = \varepsilon\left(e^{-g} - 1\right) + \sum_{k=2}^{n} e^{-g}\left(1 - e^{-g}\right)^{k-1}\varepsilon^k \quad \text{при} \quad n \geqslant 2.$$

По теореме 2.6 для любого значения $n \geqslant 0$ найдутся постоянные $\varepsilon_* > 0$, C_*, не зависящие от t, ε и такие, что решение задачи (8.1) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|x(t,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon)\| \leqslant C_*\varepsilon^{n+1}(1 - e^{-t})$$

при $t \geqslant 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$.

Теоремы 2.7, 2.8 слабее теоремы 2.6, поэтому их не рассматриваем.

Точное решение задачи (8.1) существует при $t \geqslant 0$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$ и имеет вид

$$x = \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)(1-e^g)}{\varepsilon + (1-\varepsilon)e^g}. \tag{8.4}$$

(Если $\varepsilon > 1$, то x существует не на всей оси $t \geqslant 0$. Здесь рассматриваются только значения $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$.) Ряд (8.3) сходится к функции (8.4) равномерно на множестве $t \geqslant 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$, где ε_* — произвольное число из интервала $0 < \varepsilon_* < \varepsilon_{**}$, ε_{**} — единственный корень уравнения $\varepsilon(1 + e^{|a|\varepsilon}) = 1$. Это следует из формулы (8.4) и из неравенств $|\varepsilon(1 - e^{-g})| \leqslant \varepsilon_*(1 + e^{|a|\varepsilon_*}) < \varepsilon_{**}(1 + e^{|a|\varepsilon_{**}}) = 1$.

Остаточный член ряда (8.3) равен

$$x - X_0 = \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)(1-e^g)}{\varepsilon + (1-\varepsilon)e^g}, \qquad x - X_n = \frac{\varepsilon^{n+1}(1-e^{-g})^n}{\varepsilon + (1-\varepsilon)e^g} \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Пример 8.2. Рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = \left[1 + a\cos\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right](x+\varepsilon)^2, \qquad x(0,\varepsilon) = 0, \tag{8.5}$$

где a — постоянная, не зависящая от x, t, ε. Положим $f(t,\varepsilon) = \cos(t/\varepsilon)$ и рассмотрим задачу с двумя малыми параметрами

$$\frac{dz}{dt} = \left[1 + a\cos\left(\frac{t}{\mu}\right)\right](z+\varepsilon)^2, \qquad z(0,\varepsilon,\mu) = 0. \tag{8.6}$$

Ряд (1.3) для задачи (8.6) имеет вид

$$z = \sum_{k=2}^{\infty} h^{k-1}\varepsilon^k, \qquad h \equiv t + a\mu\sin\left(\frac{t}{\mu}\right).$$

Ряд (1.10) для задачи (8.5) равен

$$x = \sum_{k=2}^{\infty} g^{k-1}\varepsilon^k, \qquad g \equiv t + a\varepsilon \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right). \tag{8.7}$$

Задача (8.5) удовлетворяет условиям теорем 2.1, 2.3–2.5, 2.7–2.8.

По теореме 2.1 для любого значения $T > 0$ найдется постоянная $\varepsilon_* > 0$, не зависящая от t, ε и такая, что на множестве $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ решение задачи (8.5) существует, единственно и представимо в виде равномерно сходящего ряда (8.7). Уравнение в вариациях для задачи (8.6) имеет вид

$$\frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Матрица Коши равна

$$U(t, s, \mu) = 1.$$

Неравенство (2.3) для U не выполняется, поэтому теоремы 2.2, 2.6 не применимы к задаче (8.5).

По теореме 2.3 для любых значений $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < 1/2$, найдется постоянная $\varepsilon_* > 0$, не зависящая от t, ε и такая, что на множестве $0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-\chi}$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ решение задачи (8.5) существует, единственно и представимо в виде равномерно сходящего ряда (8.7).

Теорема 2.4 слабее теоремы 2.3, поэтому ее не рассматриваем.

По теореме 2.5 для любых значений $T > 0$, $n \geqslant 0$ найдутся постоянные $\varepsilon_* > 0$, C_*, не зависящие от t, ε и такие, что решение задачи (8.5) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leqslant C_* t \varepsilon^{n+1}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$,

$$X_0(t, \varepsilon) = X_1(t, \varepsilon) = 0, \qquad X_n(t, \varepsilon) = \sum_{k=2}^{n} g^{k-1}\varepsilon^k \quad \text{при} \quad n \geqslant 2.$$

По теореме 2.7 для любых значений $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < 1/2$, $n \geqslant 0$ найдутся постоянные $\varepsilon_* > 0$, C_*, $C_*^\circ \geqslant 0$, не зависящие от t, ε и такие, что решение задачи (8.5) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^{n+1}\left[C_*^\circ t^{2n+1} + C_* t\right]$$

при $0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-\chi}$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$.

Теорема 2.8 слабее теоремы 2.7, поэтому ее не рассматриваем.

Точное решение задачи (8.5) существует при $0 \leqslant t \leqslant t_*(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, где t_* — наименьший положительный корень уравнения

$$t + a\varepsilon \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\varepsilon} = 0.$$

Решение имеет вид

$$x = \frac{g\varepsilon^2}{1 - g\varepsilon}. \tag{8.8}$$

Ряд (8.7) сходится к функции (8.8) равномерно на множестве

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{c}{\varepsilon} - |a|\varepsilon, \qquad \varepsilon > 0, \qquad |a|\varepsilon^2 < c$$

при любом c, $0 < c < 1$. Это следует из формулы (8.8) и из неравенств $|g\varepsilon| \leqslant t\varepsilon + |a|\varepsilon^2 \leqslant c < 1$.

Остаточный член ряда (8.7) равен

$$x - X_0 = \frac{g\varepsilon^2}{1 - g\varepsilon}, \qquad x - X_n = \frac{g^n\varepsilon^{n+1}}{1 - g\varepsilon} \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Пример 8.3. Рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = \left[1 + a\cos\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right](x + \varepsilon)(1 + x + \varepsilon), \qquad x(0, \varepsilon) = 0, \tag{8.9}$$

где a — постоянная, не зависящая от x, t, ε. Положим $f(t, \varepsilon) = \cos(t/\varepsilon)$ и рассмотрим задачу с двумя малыми параметрами

$$\frac{dz}{dt} = \left[1 + a\cos\left(\frac{t}{\mu}\right)\right](z + \varepsilon)(1 + z + \varepsilon), \qquad z(0, \varepsilon, \mu) = 0. \tag{8.10}$$

Ряд (1.3) для задачи (8.10) имеет вид

$$z = (e^h - 1)\varepsilon + \sum_{k=2}^{\infty} e^h(e^h - 1)^{k-1}\varepsilon^k, \qquad h \equiv t + a\mu\sin\left(\frac{t}{\mu}\right).$$

Ряд (1.10) для задачи (8.9) равен

$$x = (e^g - 1)\varepsilon + \sum_{k=2}^{\infty} e^g(e^g - 1)^{k-1}\varepsilon^k, \qquad g \equiv t + a\varepsilon\sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right). \tag{8.11}$$

Задача (8.9) удовлетворяет условиям теорем 2.1, 2.4, 2.5, 2.8.

По теореме 2.1 для любого значения $T > 0$ найдется постоянная $\varepsilon_* > 0$, не зависящая от t, ε и такая, что на множестве $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ решение задачи (8.9) существует, единственно и представимо в виде равномерно сходящего ряда (8.11).

Уравнение в вариациях для задачи (8.9) имеет вид

$$\frac{d\zeta}{dt} = \left[1 + a\cos\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right]\zeta.$$

Матрица Коши равна

$$U(t, s, \mu) = \exp\left\{t - s + a\mu\sin\left(\frac{t}{\mu}\right) - a\mu\sin\left(\frac{s}{\mu}\right)\right\}.$$

Справедливо неравенство

$$\|U(t, s, \mu)\| \leqslant Ce^{t-s}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant t, \qquad 0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}, \qquad C \equiv e^{2|a|\bar{\varepsilon}}.$$

Неравенства (2.3), (2.4) для матрицы U не выполняются, поэтому теоремы 2.2, 2.3, 2.6, 2.7 не применимы к задаче (8.9).

По теореме 2.4 для любых значений $T \geqslant 0$, χ, $0 \leqslant \chi < 1/2$, найдется постоянная $\varepsilon_* > 0$, не зависящая от t, ε и такая, что на множестве $0 \leqslant t \leqslant T - \chi \ln \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ решение задачи (8.9) существует, единственно и представимо в виде равномерно сходящего ряда (8.11).

По теореме 2.5 для любых значений $T > 0$, $n \geqslant 0$ найдутся постоянные $\varepsilon_* > 0$, C_*, не зависящие от t, ε и такие, что решение задачи (8.9) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leqslant C_* t \varepsilon^{n+1}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$,

$$X_0(t, \varepsilon) = 0, \qquad X_1(t, \varepsilon) = (e^g - 1)\varepsilon,$$

$$X_n(t, \varepsilon) = (e^g - 1)\varepsilon + \sum_{k=2}^{n} e^g (e^g - 1)^{k-1} \varepsilon^k \quad \text{при} \quad n \geqslant 2.$$

По теореме 2.8 для любых значений $T \geqslant 0$, χ, $0 \leqslant \chi < (n+1)/(n+2)$, $n \geqslant 0$ найдутся постоянные $\varepsilon_* > 0$, C_*, не зависящие от t, ε и такие, что решение задачи (8.9) существует, единственно и удовлетворяет неравенствам

$$\|x(t, \varepsilon)\| \leqslant C_* \varepsilon \left(e^t - 1\right),$$
$$\|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leqslant C_* \varepsilon^{n+1} e^t \left(e^{nt} - 1\right), \qquad n \geqslant 1,$$

при $0 \leqslant t \leqslant T - \chi \ln \varepsilon$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$.

Точное решение задачи (8.9) существует при $0 \leqslant t < t_*(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, где t_* — наименьший положительный корень уравнения

$$t + a\varepsilon \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \ln\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} = 0.$$

Решение имеет вид

$$x = \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)(e^g - 1)}{1 + \varepsilon - \varepsilon e^g}. \tag{8.12}$$

Ряд (8.11) сходится к функции (8.12) равномерно на множестве

$$0 \leqslant t \leqslant \ln\left(\frac{c - \varepsilon}{\varepsilon}\right) - |a|\varepsilon, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_{**},$$

ε_{**} — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \varepsilon_{**} < c$, $\varepsilon_{**} < \varepsilon_*$, $\varepsilon_* > 0$ — единственный корень уравнения

$$e^{|a|\varepsilon} - \frac{c}{\varepsilon} + 1 = 0,$$

c — произвольное число из интервала $0 < c < 1$. Это следует из формулы (8.12) и из неравенств $|\varepsilon(1 - e^g)| \leqslant \varepsilon(1 + e^{t+|a|\varepsilon}) \leqslant c < 1$.

Остаточный член ряда (8.11) равен

$$x - X_0 = \frac{\varepsilon(1+\varepsilon)(e^g - 1)}{1 + \varepsilon - \varepsilon e^g}, \qquad x - X_n = \frac{\varepsilon^{n+1} e^g (e^g - 1)^n}{1 + \varepsilon - \varepsilon e^g} \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Пример 8.4. Рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = -\left[1 + a\cos\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right](x+\varepsilon)^3, \qquad x(0,\varepsilon) = 0. \tag{8.13}$$

Задача (8.13) удовлетворяет условиям теоремы 2.11 при любых значениях δ, $\bar\varepsilon$ из множества $\delta > \bar\varepsilon > 0$, если положить

$$|a| < 1, \quad \Lambda = (x+\varepsilon)^2, \quad \rho = (\delta - \bar\varepsilon)^2.$$

Множество (2.12) описывается неравенствами

$$0 < \varepsilon \leqslant \min(\bar\varepsilon, \delta - \bar\varepsilon).$$

Производная по времени функции Λ в силу системы (8.13) равна

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -2\left[1 + a\cos\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right](x+\varepsilon)^4 \leqslant 0.$$

Из теоремы 2.11 следует, что решение задачи (8.13) существует и единственно при всех значениях $t \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$. Используя неравенство (2.13), получим следующую оценку:

$$-2\varepsilon \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \varepsilon > 0.$$

Точное решение задачи (8.13) имеет вид

$$x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon^2 t + 2a\varepsilon^3 \sin(t/\varepsilon)}} - \varepsilon.$$

При $t \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$ оно удовлетворяет неравенству $-\varepsilon < x \leqslant 0$.

§ 9. Регулярно возмущенная задача Коши

9.1. Решение регулярно возмущенной задачи Коши

Рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = F(x,t,\varepsilon), \qquad x(0,\varepsilon) = x^\circ(\varepsilon). \tag{9.1}$$

Здесь x, F, x° — N-мерные векторы, ε — малый параметр, t — независимая переменная (время).

Введем обозначения: $D_x \subset \mathbf{R}^N$ — окрестность точки $x = 0$; T, $\bar\varepsilon$ — положительные числа.

Определение 9.1. Задача Коши (9.1) называется *регулярно возмущенной*, если: 1) $F(x,t,\varepsilon)$ — гладкая функция на прямом произведении окрестности D_x и отрезков $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \bar\varepsilon$, 2) $x^\circ(\varepsilon)$ — гладкая функция на отрезке $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \bar\varepsilon$.

Решение задачи (9.1) строится методом малого параметра Пуанкаре в виде степенного ряда по ε (*ряда Пуанкаре*), коэффициенты которого зависят от t:

$$\boxed{x(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(t)\varepsilon^k.} \tag{9.2}$$

Алгоритм построения ряда (9.2) дан в § 1. Из него следует, что нулевое приближение решения $x^{(0)}(t)$ является решением вырожденной задачи, которая получается, если в (9.1) положить $\varepsilon = 0$:

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = F(x^{(0)}, t, 0), \qquad x^{(0)}(0) = x^{\circ}(0). \tag{9.3}$$

Коэффициент $x^{(k)}(t)$ при $k \geqslant 1$ вычисляется по формуле

$$x^{(k)}(t) = U(t,0) \cdot [x^{\circ}(\varepsilon)]^{(k)} + \int\limits_0^t U(t,s) \cdot F^{(k)}(s)\, ds, \tag{9.4}$$

где $U(t, s)$ — матрица Коши уравнения в вариациях

$$\frac{d\zeta}{dt} = A(t)\zeta,$$

$$A(t) \equiv F_x(x^{(0)}(t), t, 0), \qquad F^{(k)}(t) \equiv \left[F\left(\sum_{i=0}^{k-1} x^{(i)}(t)\varepsilon^i, t, \varepsilon\right)\right]^{(k)}. \tag{9.5}$$

Из написанных формул следует: для получения решения в явном виде (9.2) необходимо знать нулевое приближение $x^{(0)}(t)$ и матрицу $U(t, s)$. Тогда коэффициенты ряда (9.2) вычисляются последовательно по формулам (9.4) для $k = 1, 2, \ldots$

9.2. Теоремы о точном решении

Сформулируем условия, при которых будем рассматривать задачу (9.1).

Условие 9.1. $F(0, t, 0) = 0$ *при* $t \in D_t$, $x^{\circ}(\varepsilon) = 0$.

Условие 9.2. *На множестве* $\|x\| \leqslant \delta$, $t \in D_t$, $|\varepsilon| \leqslant \tilde{\varepsilon}$, $x \in \mathbf{C}^N$, $\varepsilon \in \mathbf{C}$ *функция* $F(x, t, \varepsilon)$ *непрерывна по совокупности аргументов, аналитична по* x, ε, *ограничена по норме.*

Условие 9.3. *На множестве* $\|x\| \leqslant \delta$, $t \in D_t$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \tilde{\varepsilon}$, $x \in \mathbf{R}^N$ *функция* $F(x, t, \varepsilon)$ *имеет непрерывные по* x, t, ε *и ограниченные по норме частные производные до порядка* n_* *включительно по* ε *и по компонентам вектора* x, $n_* = \max(2, n+1)$.

Для задачи (9.1) справедливы следующие теоремы:

Теорема 9.1. (*Пуанкаре* [4]). *Пусть при* $D_t = \{t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $T > 0$ *выполняются условия* 9.1, 9.2. *Тогда найдется постоянная* $\varepsilon_* > 0$, *не зависящая от* t, ε *и такая, что на множестве* $0 \leqslant t \leqslant T$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_*$: 1) *решение задачи* (9.1) *существует и единственно,* 2) *ряд* (9.2) *сходится равномерно к решению задачи* (9.1).

Теорема 9.2. *Пусть при $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$, $\kappa > 0$ выполняются условия 9.1, 9.2 и справедливо неравенство*

$$\|U(t, s)\| \leqslant Ce^{-\kappa(t-s)}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{9.6}$$

Тогда найдется постоянная $\varepsilon_* > 0$, не зависящая от t, ε и такая, что на множестве $t \geqslant 0$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_*$: 1) решение задачи (9.1) существует и единственно, 2) ряд (9.2) сходится равномерно к решению задачи (9.1).

Теорема 9.3. *Пусть при $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$, $\kappa \geqslant 0$, $C^\circ \geqslant 0$ выполняются условия 9.1, 9.2 и справедливо неравенство*

$$\|U(t, s)\| \leqslant C^\circ(t-s)^\kappa + C, \qquad 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{9.7}$$

Тогда для любых значений $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < [2(\kappa+1)]^{-1}$, найдется постоянная $\varepsilon_* > 0$, не зависящая от t, ε и такая, что на множестве $0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-\chi}$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$: 1) решение задачи (9.1) существует и единственно, 2) ряд (9.2) сходится равномерно к решению задачи (9.1).

Теорема 9.4. *Пусть при $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$, $\kappa \geqslant 0$ выполняются условия 9.1, 9.2 и справедливо неравенство*

$$\|U(t, s)\| \leqslant Ce^{\kappa(t-s)}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{9.8}$$

Тогда для любых значений $T \geqslant 0$, χ, $0 \leqslant \chi < (2\kappa)^{-1}$, найдется постоянная $\varepsilon_* > 0$, не зависящая от t, ε и такая, что на множестве $0 \leqslant t \leqslant T - \chi\ln\varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$: 1) решение задачи (9.1) существует и единственно, 2) ряд (9.2) сходится равномерно к решению задачи (9.1).

9.3. Теоремы об асимптотическом решении

Введем обозначение частичной суммы ряда (9.2)

$$X_n(t, \varepsilon) \equiv \sum_{k=0}^{n} x^{(k)}(t)\varepsilon^k. \tag{9.9}$$

Для задачи (9.1) справедливы теоремы

Теорема 9.5. [4]. *Пусть при $D_t = \{t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $T > 0$ выполняются условия 9.1, 9.3. Тогда найдутся постоянные $\varepsilon_* > 0$, C_*, C_{**}, не зависящие от t, ε и такие, что решение задачи (9.1) существует, единственно и удовлетворяет неравенствам*

$$\|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leqslant C_* t\varepsilon^{n+1}, \qquad \|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leqslant C_{**}\varepsilon^{n+1}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$.

Теорема 9.6. *Пусть при $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$, $\kappa > 0$ выполняются условия 9.1, 9.3 и неравенство (9.6). Тогда найдутся постоянные $\varepsilon_* > 0$, C_*, не зависящие от t, ε и такие, что решение задачи (9.1) существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leqslant C_*\varepsilon^{n+1}(1 - e^{-\kappa t})$$

при $t \geqslant 0$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$.

Теорема 9.7. *Пусть при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$, $\kappa \geqslant 0$, $C^\circ \geqslant 0$ *выполняются условия* 9.1, 9.3 *и неравенство* (9.7). *Тогда для любых значений* $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < [2(\kappa+1)]^{-1}$, *найдутся постоянные* $\varepsilon_* > 0$, C_*, $C_*^\circ \geqslant 0$, *не зависящие от* t, ε *и такие, что решение задачи* (9.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^{n+1}\big[C_*^\circ t^{(\kappa+1)(2n+1)} + C_* t\big]$$

при $0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-\chi}$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$.

Теорема 9.8. *Пусть при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$, $\kappa > 0$ *выполняются условия* 9.1, 9.3 *и неравенство* (9.8). *Тогда для любых значений* $T \geqslant 0$, χ, $0 \leqslant \chi < (n+1)/[(n+2)\kappa]$, *найдутся постоянные* $\varepsilon_* > 0$, C_*, *не зависящие от* t, ε *и такие, что решение задачи* (9.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенствам*

$$\|x(t,\varepsilon)\| \leqslant C_*\varepsilon(e^{\kappa t} - 1),$$
$$\|x(t,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon)\| \leqslant C_*\varepsilon^{n+1}e^{\kappa t}(e^{n\kappa t} - 1), \quad n \geqslant 1$$

при $0 \leqslant t \leqslant T - \chi\ln\varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$.

Из теорем 9.5–9.8 следует, что функция $X_n(t,\varepsilon)$, заданная формулой (9.9), является асимптотическим решением задачи (9.1) на отрезке (теорема 9.5), на полуоси (теорема 9.6), на асимптотически больших интервалах времени (теоремы 9.7, 9.8). Справедливы равенства

$$\begin{aligned}
&x(t,\varepsilon) = X_n(t,\varepsilon) + o(\varepsilon^n), && 0 \leqslant t \leqslant T, && \varepsilon \to 0 && \text{(теорема 9.5);}\\
&x(t,\varepsilon) = X_n(t,\varepsilon) + o(\varepsilon^n), && t \geqslant 0, && \varepsilon \to 0 && \text{(теорема 9.6);}\\
&x(t,\varepsilon) = X_n(t,\varepsilon) + o(\varepsilon^{n\chi_*}), && 0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-\chi}, && \varepsilon \to 0 && \text{(теорема 9.7),}
\end{aligned}$$

где T, χ — произвольные числа из множества $T > 0$, $0 \leqslant \chi < [2(\kappa+1)]^{-1}$, $\chi_* = 1 - 2\chi(\kappa+1)$;

$$x(t,\varepsilon) = X_n(t,\varepsilon) + o(\varepsilon^{n\chi_*}), \quad 0 \leqslant t \leqslant T - \chi\ln\varepsilon, \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{(теорема 9.8),}$$

где T, χ — произвольные числа из множества $T \geqslant 0$, $0 \leqslant \chi < (2\kappa)^{-1}$, $\chi_* = 1 - 2\kappa\chi$.

9.4. Теорема о точном решении при фиксированном значении ε

Теорема 9.9. [19]. *Пусть при* $D_t = \{t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $T > 0$ *выполняются условия* 9.1, 9.2. *Тогда для любого* ε, $0 \leqslant \varepsilon < \bar\varepsilon$, *найдется такая постоянная* $t_* = t_*(\varepsilon)$, *что* $0 < t_* \leqslant T$ *и на множестве* $0 \leqslant t \leqslant t_*$: 1) *решение задачи* (9.1) *существует и единственно,* 2) *ряд* (9.2) *сходится равномерно к решению задачи* (9.1).

9.5. Оценка остаточного члена, интервала времени, значений малого параметра

Для оценки точности асимптотического решения задачи (9.1) можно использовать теорему 2.10. Приведем теорему, которая отличается от теоремы 2.10 тем, что в ней учитывается малый параметр. Для этого рассмотрим задачу

$$\frac{du}{dt} = A(t,\varepsilon)u + G(u,t,\varepsilon), \qquad u(0) = u^\circ(\varepsilon). \tag{9.10}$$

Условие 9.4. *Матрица $A(t,\varepsilon)$ непрерывна по t при $0 \leqslant t \leqslant t_*(\varepsilon)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}$.*

Условие 9.5. *При $\|u\| \leqslant \delta$, $\|\widetilde{u}\| \leqslant \delta$, $0 \leqslant t \leqslant t_*(\varepsilon)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}$ функция $G(u,t,\varepsilon)$ непрерывна по u, t и удовлетворяет неравенству*

$$\|G(u,t,\varepsilon) - G(\widetilde{u},t,\varepsilon)\| \leqslant \left[L_1(t,\varepsilon) + L_2(t,\varepsilon)\left(\|u\| + \|\widetilde{u}\|\right)\right] \cdot \|u - \widetilde{u}\|, \tag{9.11}$$

где $L_1(t,\varepsilon) \geqslant 0$, $L_2(t,\varepsilon) \geqslant 0$ непрерывны по t.

Обозначим

$$a(t,\varepsilon) = \max_{0\leqslant q\leqslant t}\left\|U(q,0,\varepsilon)\cdot u^\circ(\varepsilon) + \int\limits_0^q U(q,s,\varepsilon)\cdot G(0,s,\varepsilon)\,ds\right\|,$$

$$b(t,\varepsilon) = \max_{0\leqslant q\leqslant t}\int\limits_0^q \|U(q,s,\varepsilon)\|\cdot L_1(s,\varepsilon)\,ds,$$

$$c(t,\varepsilon) = \max_{0\leqslant q\leqslant t}\int\limits_0^q \|U(q,s,\varepsilon)\|\cdot L_2(s,\varepsilon)\,ds,$$

где $U(t,s,\varepsilon)$ — матрица Коши системы

$$\frac{d\zeta}{dt} = A(t,\varepsilon)\zeta.$$

Теорема 9.10. *Пусть при $\delta > 0$ и $t_*(\varepsilon) > 0$ выполняются условия 9.4, 9.5. Тогда решение задачи (9.10) существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|u(t,\varepsilon)\| \leqslant \frac{2a(t,\varepsilon)}{p(t,\varepsilon) + \sqrt{r(t,\varepsilon)}} \tag{9.12}$$

при всех значениях t, ε из множества

$$\begin{gathered} p(t,\varepsilon) \equiv 1 - b(t,\varepsilon) > 0, \quad r(t,\varepsilon) \equiv p^2(t,\varepsilon) - 4a(t,\varepsilon)c(t,\varepsilon) > 0, \\ 2a(t,\varepsilon) < \delta\left[p(t,\varepsilon) + \sqrt{r(t,\varepsilon)}\right], \quad 0 \leqslant t \leqslant t_*(\varepsilon), \quad \|u^\circ(\varepsilon)\| < \delta. \end{gathered} \tag{9.13}$$

9.6. Второй метод Ляпунова

Задача об оценке остаточного члена ряда (9.2) тесно связана с задачами теории устойчивости. Покажем это.

Обозначим остаточный член $u \equiv x - X_n(t,\varepsilon)$. Перейдем в (9.1) от x к u. Получим

$$\frac{du}{dt} = \widehat{F}(u,t,\varepsilon), \quad u(0,\varepsilon) = u^\circ(\varepsilon).$$
$$\widehat{F}(u,t,\varepsilon) = F\big(u + X_n(t,\varepsilon), t, \varepsilon\big) - \big[F(X_n(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\big]^{(\leqslant n)}, \tag{9.14}$$
$$u^\circ = x^\circ(\varepsilon) - [x^\circ(\varepsilon)]^{(\leqslant n)}.$$

Справедливы равенства $\widehat{F}(0,t,0) = 0$, $u^\circ(0) = 0$. Рассмотрим вместе с (9.14) задачу

$$\frac{dw_1}{dt} = \widehat{F}(w_1,t,w_2), \quad \frac{dw_2}{dt} = 0, \quad w_1(0,\varepsilon) = u^\circ(\varepsilon), \quad w_2(0,\varepsilon) = \varepsilon. \tag{9.15}$$

Очевидно, что если (9.14) имеет решение $u = g(t,\varepsilon)$, то (9.15) имеет решение $w_1 = g(t,\varepsilon)$, $w_2 = \varepsilon$, и наоборот. Так как $\widehat{F}(0,t,0) = 0$, то система дифференциальных уравнений (9.15) имеет нулевое решение $w_1 = 0$, $w_2 = 0$. При малых значениях модуля ε (9.15) является задачей о решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений при малых начальных возмущениях. Оценку таких решений (а значит и оценку остаточного члена u) можно получить, используя методы теории устойчивости.

Рассмотрим второй метод Ляпунова для задачи (9.1). Введем обозначения: J — целое число, $1 \leqslant J \leqslant N$; $\widetilde{x}$ — вектор, состоящий из J компонент вектора x; D — множество в пространстве $\mathbf{R}^{N+2} \ni (x,t,\varepsilon)$; $D_* \equiv \{(x,t,\varepsilon)\colon \|x\| \leqslant \delta, t \geqslant 0, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}\}$.

Определение 9.2. *Производной по времени функции* $\Lambda(u,t,\varepsilon)$ *в силу системы* (9.1) называется функция

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\partial\Lambda(x,t,\varepsilon)}{\partial x}F(x,t,\varepsilon) + \frac{\partial\Lambda(x,t,\varepsilon)}{\partial t}.$$

Пусть при $(x,t,\varepsilon) \in D$ производная по времени функции $\Lambda(x,t,\varepsilon)$ в силу системы (9.1) неположительна. Тогда для решения $x = x(t,\varepsilon)$ задачи (9.1) справедливо неравенство

$$\Lambda\big(x(T,\varepsilon),T,\varepsilon\big) \leqslant \Lambda\big(x^\circ(\varepsilon),0,\varepsilon\big) \tag{9.16}$$

при всех T, ε, удовлетворяющих условиям: при $0 \leqslant t \leqslant T$ решение $x(t,\varepsilon)$ существует и $x(t,\varepsilon) \in D$. Неравенство (9.16) позволяет иногда получить оценку вектора x или отдельных его компонент. Например, справедлива

Теорема 9.11. *Пусть для некоторых постоянных $\delta > 0$, $\bar{\varepsilon} > 0$, $\rho > 0$ выполнены условия:*
1. При $(x, t, \varepsilon) \in D_*$ функция $F(x, t, \varepsilon)$ непрерывна по t и имеет непрерывные по x, t частные производные по компонентам вектора x.
2. Существует такая функция $\Lambda(x, t, \varepsilon)$, что: а) при $(x, t, \varepsilon) \in D_*$ производная по времени функции $\Lambda(x, t, \varepsilon)$ в силу системы (9.1) существует и неположительна; б) $\Lambda(x, t, \varepsilon) \geqslant \rho$ при $(x, t, \varepsilon) \in D_*$, $\|\widetilde{x}\| = \delta$.
Тогда, если множество

$$0 \leqslant \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}, \quad \|x^\circ(\varepsilon)\| < \delta, \quad \Lambda(x^\circ(\varepsilon), 0, \varepsilon) < \rho \tag{9.17}$$

не пусто, то для любого ε из этого множества решение задачи Коши (9.1) существует, единственно и удовлетворяет неравенству $\|\widetilde{x}(t, \varepsilon)\| < \delta$ при $0 \leqslant t \leqslant t_*$, $t < \infty$. Если $J = N$, то $t_* = \infty$; если $J < N$, то $t_* = t_*(\varepsilon) > 0$.

Теорема 9.11 аналогична теореме Ляпунова при $J = N$ [33] и теореме Румянцева при $J < N$ [41]. $\Lambda(x, t, \varepsilon)$ — функция Ляпунова. При выполнении условий теоремы 9.11 для всех ε из множества (9.17) и t, $0 \leqslant t \leqslant t_*$, $t < \infty$, справедливо неравенство

$$\Lambda\bigl(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon\bigr) \leqslant \Lambda\bigl(x^\circ(\varepsilon), 0, \varepsilon\bigr). \tag{9.18}$$

Неравенство $d\Lambda/dt \leqslant 0$ и неравенства (9.16), (9.18) позволяют иногда получить оценку решения задачи (9.1) и оценку значений t, ε (смотрите пример 10.7).

9.7. Замечания

Замечание 9.1. Определение регулярно возмущенной задачи Коши дано для отрезка $0 \leqslant t \leqslant T$. Из теорем 9.2–9.4, 9.6–9.8 следует, что при определенных условиях решение регулярно возмущенной задачи Коши распространяется на бесконечный и на асимптотически большой интервал времени.

Замечание 9.2. Если D_t — отрезок $0 \leqslant t \leqslant T$, то ограниченность по норме в условиях 9.2, 9.3 следует из непрерывности функции и производных.

Замечание 9.3. Условие 9.1 не ограничивает класс задач (9.1). Действительно, пусть условие 9.1 для задачи (9.1) не выполняется. Тогда перейдем к новой переменной $\widetilde{x}$ по формуле:

$$\widetilde{x} = x - x^{(0)}(t) - x^\circ(\varepsilon) + x^\circ(0).$$

Нетрудно проверить, что задача Коши для новой переменной удовлетворяет условию 9.1. Смотрите об этом в п. 1.3.

Замечание 9.4. При выполнении условия 9.1 $x^{(0)}(t) = 0$. Если $\varepsilon = 0$, то решение задачи (9.1) существует на всей оси $t \geqslant 0$ в теоремах 9.2–9.4, 9.6–9.8 ($x \equiv 0$).

Замечание 9.5. Теоремы 9.1–9.11 являются следствиями теорем 2.1–2.11 соответственно. При этом неравенство $\varepsilon > 0$ заменяется на $\varepsilon \geqslant 0$, как следует из доказательства, данного в § 3–§ 7.

Замечание 9.6. В [19] показано, что теоремы 9.1, 9.9 можно получить из теоремы Ляпунова о разложении решения в ряд по степеням начальных значений (начальных возмущений).

§ 10. Примеры регулярно возмущенной задачи Коши

Примеры 8.1–8.4 при обращении постоянной a в ноль становятся примерами регулярно возмущенной задачи Коши. Эти примеры разобраны в § 8. Когда почти регулярная задача Коши становится регулярно возмущенной задачей, теоремы 2.1–2.11 переходят соответственно в теоремы 9.1–9.11, неравенство $\varepsilon > 0$ заменяется при этом на $\varepsilon \geqslant 0$.

Пример 10.1. Решим методом малого параметра Пуанкаре задачу

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon x, \qquad x(0,\varepsilon) = \varepsilon. \tag{10.1}$$

Подставим ряд (9.2) в уравнения (10.1). Получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{dx^{(k)}}{dt}\varepsilon^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}\varepsilon^{k+1}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(0)\varepsilon^k = \varepsilon. \tag{10.2}$$

Приравняем в уравнениях (10.2) коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = 0, \qquad \frac{dx^{(k)}}{dt} = x^{(k-1)}, \qquad k \geqslant 1,$$

$$x^{(0)}(0) = 0, \qquad x^{(1)}(0) = 1; \qquad x^{(k)}(0) = 0 \qquad k \geqslant 2.$$

Решение уравнений имеет вид

$$x^{(0)} = 0, \qquad x^{(k)} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \qquad k \geqslant 1.$$

Подставим формулы в выражение (9.2). Получим

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\varepsilon^k = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon t)^k}{k!} = \varepsilon e^{\varepsilon t}.$$

Нетрудно проверить, что функция $x = \varepsilon e^{\varepsilon t}$ является решением задачи (10.1).

Пример 10.2. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = \chi(\varepsilon), \qquad x(0,\varepsilon) = 0, \tag{10.3}$$

где функция $\chi(\varepsilon)$ определена равенствами

$$\chi(\varepsilon) = \begin{cases} \exp\{-\varepsilon^{-2}\} & \text{при} \quad \varepsilon \neq 0, \\ 0, & \text{при} \quad \varepsilon = 0. \end{cases} \tag{10.4}$$

Справедливы равенства

$$\left.\frac{d^k\chi}{d\varepsilon^k}\right|_{\varepsilon=0} = 0, \qquad k \geqslant 0.$$

Поэтому, используя метод малого параметра Пуанкаре, получим

$$x^{(k)}(t) = 0, \qquad k \geqslant 0; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(t)\varepsilon^k = 0.$$

Однако решение задачи (10.3) имеет вид

$$x = \chi(\varepsilon)t. \tag{10.5}$$

Решение равно нулю только при $\varepsilon = 0$. При $\varepsilon \neq 0$ $x \neq 0$. Отсюда следует, что метод малого параметра Пуанкаре не всегда приводит к решению задачи Коши.

Задача (10.3) не удовлетворяет условию 9.2 теоремы Пуанкаре 9.1, так как функция $\chi(\varepsilon)$ не аналитична в точке $\varepsilon = 0$.

Для (10.3) выполняются условия теоремы 9.5 при любых $\delta > 0$, $T > 0$, $\bar{\varepsilon} > 0$, $n \geqslant 0$. Асимптотическое решение $X_n(t, \varepsilon) = 0$. Отсюда и из теоремы 9.5 следует: для любого $T > 0$ найдутся такие постоянные $\varepsilon_* > 0$, C_*, что решение задачи (10.3) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$|x(t,\varepsilon)| \leqslant C_*\varepsilon^{n+1} \tag{10.6}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$. Решение задачи (10.3), имеющее вид (10.5), существует при всех значениях t, ε. Нетрудно получить, что при любых значениях $T > 0$, $a > 0$ нулевой ряд является асимптотическим решением задачи (10.3) на асимптотически большом интервале времени:

$$x(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^n), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^a \exp\left\{\varepsilon^{-2}\right\}, \quad \varepsilon \to 0.$$

При $0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^a \exp\left\{\varepsilon^{-2}\right\}$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$, $n \geqslant 0$ справедлива оценка (10.6), где $C_* = T\varepsilon_*^a$.

Пример 10.3.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\varepsilon(\varepsilon + t - t^2)}{t^2(\varepsilon + t)^2} \exp\left\{-\frac{1}{t}\right\}, \qquad x(0,\varepsilon) = 0. \tag{10.7}$$

Решая задачу (10.7) методом малого параметра Пуанкаре, получим ряд

$$x = -\sum_{k=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{t}\right\} \cdot \left(-\frac{\varepsilon}{t}\right)^k,$$

расходящийся при всех значениях t, ε из множества $0 < t \leqslant |\varepsilon|$. Решение задачи (10.7), имеющее вид

$$x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + t} \exp\left\{-\frac{1}{t}\right\}, \tag{10.8}$$

существует при $t \geqslant 0$, если $\varepsilon \geqslant 0$, и при $0 \leqslant t < |\varepsilon|$, если $\varepsilon < 0$. Функцию (10.8) нельзя представить в виде ряда (9.2), который сходился бы при $0 < t \leqslant |\varepsilon|$. Отсюда следует, что метод малого параметра Пуанкаре не применим для точного решения задачи (10.7).

Задача (10.7) не удовлетворяет условию 9.2 теоремы Пуанкаре 9.1, так как правая часть дифференциального уравнения (10.7) не является непрерывной

в точке $t = 0$, $\varepsilon = 0$. Чтобы это увидеть, достаточно устремиться к этой точке по пути

$$t = s, \qquad \varepsilon = -s + \exp\left\{-\frac{1}{s}\right\}, \qquad s \to 0.$$

Для задачи (10.7) выполняются условия теоремы 9.5 при любых $\delta > 0$, $T > 0$, $\bar{\varepsilon} > 0$, $n \geqslant 0$. Поэтому для любого $T > 0$ найдутся такие постоянные $\varepsilon_* > 0$, C_*, что решение задачи (10.7) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$|x(t,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon)| \leqslant C_* \varepsilon^{n+1} \tag{10.9}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$. Решение задачи (10.7), имеющее вид (10.8), существует при $t \geqslant 0$, если $\varepsilon \geqslant 0$. Нетрудно вычислить асимптотическое решение и остаточный член асимптотики:

$$X_0(t,\varepsilon) = 0, \qquad X_n(t,\varepsilon) = -\sum_{k=1}^{n} \exp\left\{-\frac{1}{t}\right\}\left(-\frac{\varepsilon}{t}\right)^k \quad \text{при} \quad n \geqslant 1,$$

$$x(t,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{n+1}}{(\varepsilon+t)(-t)^n} \exp\left\{-\frac{1}{t}\right\} \quad \text{при} \quad n \geqslant 0.$$

Для любых значений $n \geqslant 0$, $T > 0$, $a \geqslant 0$ функция $X_n(t,\varepsilon)$ является асимптотическим решением задачи (10.7) на асимптотически большом интервале времени:

$$x = X_n(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-a}, \qquad \varepsilon \to 0.$$

При $0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-a}$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ справедлива оценка (10.9), где

$$C_* = \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

при условии: ε_* настолько мало, что удовлетворяет неравенству

$$2(n+1)T > \varepsilon_*^a \left[1 - \varepsilon_* n + \sqrt{n^2\varepsilon_*^2 + 2\varepsilon_*(n+2) + 1}\right].$$

Пример 10.4. Рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon+t)^2}, \qquad x(0,\varepsilon) = 0. \tag{10.10}$$

Используя метод малого параметра Пуанкаре, получим:

$$x^{(0)}(t) = 0, \qquad x^{(1)}(t) = 0, \qquad X_0(t,\varepsilon) = 0, \qquad X_1(t,\varepsilon) = 0.$$

Функции $x^{(k)}(t)$ при $k \geqslant 2$ не существуют, так как они должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{dx^{(k)}}{dt} = \frac{k-1}{(-t)^k}, \qquad x^{(k)}(0) = 0,$$

что невозможно. Решение задачи (10.10), имеющее вид

$$x = \frac{\varepsilon t}{\varepsilon + t}, \tag{10.11}$$

существует при $t \geqslant 0$, если $\varepsilon \geqslant 0$, и при $0 \leqslant t < |\varepsilon|$, если $\varepsilon < 0$. Функцию (10.11) нельзя представить в виде ряда (9.2), который сходился бы при $0 \leqslant t < |\varepsilon|$, $\varepsilon \neq 0$.

Отсюда следует, что метод малого параметра Пуанкаре не применим для точного решения задачи (10.10).

Задача 10.10 не удовлетворяет условию 9.2 теоремы Пуанкаре 9.1, так как правая часть дифференциального уравнения (10.10) не является непрерывной в точке $t = 0$, $\varepsilon = 0$. Чтобы это увидеть, достаточно устремиться к этой точке по пути

$$t = s, \qquad \varepsilon = \frac{s}{s-1}, \qquad s \to 0.$$

Задача (10.10) удовлетворяет условиям теоремы 9.10 при любых значениях $\delta > 0$, $\bar{\varepsilon} > 0$ и $t_*(\varepsilon) = \infty$. Справедливы формулы

$$A(t) = 0, \qquad G(x, t, \varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + t}\right)^2, \qquad L_1 = 0, \qquad L_2 = 0,$$

$$a = \max_{0 \leqslant q \leqslant t} \int\limits_0^q \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + s}\right)^2 ds = \frac{\varepsilon t}{\varepsilon + t}, \qquad b = 0, \qquad c = 0.$$

Из теоремы 9.10 следует, что решение задачи (10.10) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$|x(t, \varepsilon)| \leqslant \frac{\varepsilon t}{\varepsilon + t} \tag{10.12}$$

при $t \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$. Это оценка остаточного члена нулевого и первого порядков, так как

$$z = x - X_0 = x - X_1.$$

Оценка (10.12) является точной, так как совпадает с решением задачи (10.11).

Пример 10.5. Рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = (x + \varepsilon)^{3/2}, \qquad x(0, \varepsilon) = 0. \tag{10.13}$$

Метод малого параметра Пуанкаре дает только первые коэффициенты ряда (9.2):

$$x^{(0)}(t) = 0, \qquad x^{(1)}(t) = 0.$$

Для $k \geqslant 2$ функции $F^{(k)}(t)$ в (9.5) не существуют, так как правая часть дифференциального уравнения (10.13) не имеет производных по x, ε порядка $\geqslant 2$ при $x = 0$, $\varepsilon = 0$. Решение задачи (10.13), имеющее вид

$$x = \frac{4\varepsilon}{(2 - t\sqrt{\varepsilon})^2} - \varepsilon, \tag{10.14}$$

существует при всех значениях t, ε из множества $0 \leqslant t < 2/\sqrt{\varepsilon}$, $\varepsilon \geqslant 0$. Это решение нельзя представить в виде ряда (9.2), так как функция (10.14) не имеет производных по ε порядка $\geqslant 2$ при $t > 0$, $\varepsilon = 0$. Отсюда следует, что метод малого параметра Пуанкаре не применим для точного решения задачи (10.13).

Пример 10.5 не удовлетворяет условию 9.2 теоремы Пуанкаре 9.1, так как правая часть дифференциального уравнения (10.13) не аналитична в точке $x = 0$ $\varepsilon = 0$.

Для задачи (10.13) выполняются условия теоремы 9.5 при любых $\delta > 0$, $T > 0$, $\bar{\varepsilon} > 0$, $n = 0$. При этом $X_0(t, \varepsilon) = 0$. Поэтому для любого $T > 0$ найдутся

такие постоянные $\varepsilon_* > 0$, C_*, что решение задачи (10.13) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$|x(t,\varepsilon)| \leqslant C_*\varepsilon \tag{10.15}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$. Исследуя функцию (10.14), нетрудно получить, что при любом значении a из интервала $0 < a < 2$ нулевая функция является асимптотическим решением задачи (10.13) на асимптотически большом интервале времени:

$$x(t,\varepsilon) = O(\varepsilon), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{2-a}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad \varepsilon \to 0.$$

При $0 \leqslant t \leqslant (2-a)/\sqrt{\varepsilon}$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ справедлива оценка (10.15), в которой $C_* = (4-a^2)/a^2$.

Пример 10.6. Рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = x + \varepsilon x^2, \qquad x(0,\varepsilon) = 1. \tag{10.16}$$

При $\varepsilon = 0$ эта задача имеет решение $x^{(0)}(t) = e^t$. Оценим остаточный член нулевого порядка

$$u_0 \equiv x - X_0(t,\varepsilon) = x - x^{(0)}(t) = x - e^t.$$

Для этого в (10.16) перейдем от x к переменной u_0. Получим задачу

$$\frac{du_0}{dt} = u_0 + \varepsilon(u_0 + e^t)^2, \qquad u_0(0,\varepsilon) = 0, \tag{10.17}$$

удовлетворяющую условиям теоремы 9.10 при любых значениях δ, $\bar{\varepsilon}$ и $t_*(\varepsilon) = \infty$. Задача (10.17) эквивалентна интегральному уравнению

$$u_0(t,\varepsilon) = \int_0^t e^{t-s}\varepsilon\big[u_0(s,\varepsilon) + e^s\big]^2\,ds,$$

из которого следует:

$$\begin{gathered} u_0(t,\varepsilon) = \varepsilon e^t(e^t-1) + \int_0^t e^{t-s}\varepsilon\big[u_0^2(s,\varepsilon) + 2e^s u_0(s,\varepsilon)\big]\,ds, \\ v_0 \leqslant \varepsilon e^t(e^t-1) + (e^t-1)\varepsilon v_0^2 + 2\varepsilon t e^t v_0, \\ \varepsilon(e^t-1)v_0^2 - (1-2\varepsilon t e^t)v_0 + \varepsilon e^t(e^t-1) \geqslant 0, \qquad v_0 \equiv \max_{0\leqslant q\leqslant t} |u_0(q,\varepsilon)|. \end{gathered} \tag{10.18}$$

Используя алгоритм доказательства теоремы 2.10, получим, что для всех t, ε из множества

$$p_0 \equiv 1 - 2\varepsilon t e^t > 0, \qquad r_0 \equiv p_0^2 - 4\varepsilon^2 e^t(e^t-1)^2 > 0$$

решение задачи (10.17) (а значит и задачи (10.16)) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$|x - e^t| = |u_0| \leqslant v_{0*} \equiv \frac{2\varepsilon e^t\left(e^t-1\right)}{p_0 + \sqrt{r_0}}. \tag{10.19}$$

При $\varepsilon = 0{,}1$ полученный результат формулируется следующим образом: решение задачи (10.16) существует и единственно на интервале $0 \leqslant t < 0{,}949$. При $t = 0{,}9$, $\varepsilon = 0{,}1$ из (10.19) следуют неравенства $1{,}64 \leqslant x(0{,}9;\ 0{,}1) \leqslant 3{,}28$.

Оценку (10.19) можно улучшить, если рассмотреть следующие из (10.18) неравенства:

$$\left\| x - e^t - \varepsilon e^t(e^t - 1) \right\| = \left| u_0 - \varepsilon e^t\left(e^t - 1\right) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(e^t - 1\right)\varepsilon v_0^2 + 2\varepsilon v_0 t e^t \leqslant \left(e^t - 1\right)\varepsilon v_{0*}^2 + 2\varepsilon v_{0*} t e^t.$$

Для $t = 0{,}9$, $\varepsilon = 0{,}1$ отсюда получим:

$$2{,}36 \leqslant x(0{,}9;\ 0{,}1) \leqslant 3{,}28.$$

Рассмотрим следующее приближение решения задачи (10.16). Нетрудно вычислить функцию $x^{(1)}(t)$:

$$x^{(1)}(t) = e^t(e^t - 1).$$

Перейдем в (10.16) от x к переменной u_1, $u_1 \equiv x - X_1(t, \varepsilon) = x - e^t - \varepsilon e^t(e^t - 1)$. Получим задачу Коши для u_1:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1 + \varepsilon(u_1 + \varepsilon e^{2t} - \varepsilon e^t)(u_1 + 2e^t + \varepsilon e^{2t} - \varepsilon e^t), \qquad u_1(0, \varepsilon) = 0, \tag{10.20}$$

удовлетворяющую условиям теоремы 9.10 при любых значениях δ, $\bar{\varepsilon}$ и $t_*(\varepsilon) = \infty$. Задача (10.20) эквивалентна интегральному уравнению

$$u_1(t, \varepsilon) = \int\limits_0^t e^{t-s}\varepsilon\left[u_1(s, \varepsilon) + \varepsilon e^{2s} - \varepsilon e^s\right] \cdot \left[u_1(s, \varepsilon) + 2e^s + \varepsilon e^{2s} - \varepsilon e^s\right] ds,$$

из которого следуют соотношения

$$u_1(t,\varepsilon) = a_1 + \int\limits_0^t \varepsilon e^{t-s}\left[u_1^2(s,\varepsilon) + u_1(s,\varepsilon)2e^s(\varepsilon e^s + 1 - \varepsilon)\right] ds,$$

$$a_1 \equiv \varepsilon^2\left[\frac{\varepsilon e^{4t}}{3} + (1-\varepsilon)e^{3t} + (\varepsilon - 2)e^{2t} + \frac{(3-\varepsilon)e^t}{3}\right], \tag{10.21}$$

$$v_1 \leqslant a_1 + v_1^2\varepsilon(e^t - 1) + 2\varepsilon v_1 e^t\left[\varepsilon(e^t - 1) + (1-\varepsilon)t\right],$$
$$\varepsilon\left(e^t - 1\right)v_1^2 - \left[1 - 2\varepsilon e^t\left(\varepsilon e^t + t - \varepsilon t - \varepsilon\right)\right]v_1 + a_1 \geqslant 0, \quad v_1(t,\varepsilon) \equiv \max_{0 \leqslant q \leqslant t} |u_1(q,\varepsilon)|.$$

Используя алгоритм доказательства теоремы 2.10, получим: для всех t, ε из множества

$$p_1 \equiv 1 - 2\varepsilon e^t(\varepsilon e^t + t - \varepsilon t - \varepsilon) > 0, \qquad r_1 \equiv p_1^2 - 4\varepsilon a_1(e^t - 1) > 0$$

решение задачи (10.20) (а значит и задачи (10.16)) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$|x - e^t - \varepsilon e^t(e^t - 1)| = |u_1(t, \varepsilon)| \leqslant v_{1*} \equiv \frac{2a_1}{p_1 + \sqrt{r_1}}. \tag{10.22}$$

При $\varepsilon = 0{,}1$ это означает, что решение задачи (10.16) существует и единственно на интервале $0 \leqslant t < 1{,}084$. При $t = 0{,}9$, $\varepsilon = 0{,}1$ из (10.22) следуют неравенства $2{,}71 \leqslant x(0{,}9;\ 0{,}1) \leqslant 2{,}93$.

Уточним неравенство (10.22), используя соотношения (10.21):

$$\left|x - e^t - \varepsilon e^t(e^t - 1) - a_1\right| = |u_1 - a_1| \leqslant v_1^2\varepsilon\left(e^t - 1\right) + 2\varepsilon v_1 e^t\left(\varepsilon e^t + t - \varepsilon t - \varepsilon\right) \leqslant$$
$$\leqslant v_{1*}^2\varepsilon\left(e^t - 1\right) + 2\varepsilon v_{1*} e^t\left(\varepsilon e^t + t - \varepsilon t - \varepsilon\right).$$

Для $t = 0{,}9$, $\varepsilon = 0{,}1$ отсюда получим оценку

$$2{,}82 \leqslant x(0{,}9;\ 0{,}1) \leqslant 2{,}93.$$

Точное решение задачи (10.16) имеет вид

$$x = \frac{e^t}{1 + \varepsilon - \varepsilon e^t}. \tag{10.23}$$

Оно существует при $1 + \varepsilon - \varepsilon e^t > 0$. Для $\varepsilon = 0{,}1$ это означает, что решение задачи (10.16) существует и единственно при $0 \leqslant t < \ln 11 \approx 2{,}398$. По формуле (10.23)

$$x(0{,}9;\ 0{,}1) \approx 2{,}88, \qquad 2{,}87 < x(0{,}9;\ 0{,}1) < 2{,}88.$$

Пример 10.7. Рассмотрим пример 8.4 при $a = 0$:

$$\frac{dx}{dt} = -(x + \varepsilon)^3, \qquad x(0, \varepsilon) = 0. \tag{10.24}$$

Задача (10.24) удовлетворяет условиям теоремы 9.11 при любых значениях δ, $\bar{\varepsilon}$ из множества $\delta > \bar{\varepsilon} \geqslant 0$, если положить

$$\Lambda = (x + \varepsilon)^2.$$

Производная по времени функции Λ в силу системы (10.24) равна

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -2(x + \varepsilon)^4 \leqslant 0.$$

По теореме 9.11 решение задачи (10.24) существует и единственно при всех значениях $t \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$. Используя неравенство (9.18), получим следующую оценку:

$$-2\varepsilon \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \quad \varepsilon \geqslant 0.$$

Точное решение задачи (10.24) имеет вид

$$x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon^2 t}} - \varepsilon.$$

При $t \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$ оно удовлетворяет неравенству $-\varepsilon \leqslant x \leqslant 0$.

§ 11. Оценка радиуса сходимости

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t, \varepsilon), \quad x(0, \varepsilon) = 0. \tag{11.1}$$

Если эта задача удовлетворяет условиям теоремы Пуанкаре 9.1, то ее решение можно найти методом малого параметра Пуанкаре в виде ряда

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(t)\varepsilon^k, \tag{11.2}$$

сходящегося при $0 \leqslant t \leqslant T$, $|\varepsilon| < \varepsilon_{**}$. Рассмотрим оценки радиуса сходимости ε_{**}. Пусть D_x — окрестность точки $x = 0$ в $\mathbb{R}^n \ni x$, D_ε — окрестность точки $\varepsilon = 0$ в $\mathbb{R} \ni \varepsilon$, D_ε содержит множество $|\varepsilon| \leqslant 1$.

Теорема 11.1. *Пусть функция $F(x, t, \varepsilon)$ аналитична при $x \in D_x$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\varepsilon \in D_\varepsilon$. Пусть при $0 \leqslant t \leqslant T$*

$$F(x, t, \varepsilon) \ll \varphi(x, \varepsilon)(\arg x, \varepsilon),$$

$$\varphi(x, \varepsilon) \equiv \frac{KS(1+S)}{1-S}, \qquad S \equiv \sum_{j=1}^{N} x_j + \varepsilon, \qquad K = \mathrm{const}. \tag{11.3}$$

Тогда ряд (11.2) *сходится к единственному решению задачи Коши* (11.1) *при* $0 \leqslant t \leqslant T$, $|\varepsilon| < \varepsilon_{**}$, *где*

$$\varepsilon_{**} \geqslant 2e^{KNT} - 1 - 2\sqrt{e^{KNT}\left(e^{KNT} - 1\right)} > \frac{1}{4}e^{-KNT}. \tag{11.4}$$

Доказательство. Сходимость ряда (11.2) к решению задачи (11.1) следует из теоремы Пуанкаре 9.1. Оценим радиус сходимости. При доказательстве теоремы 2.9 в § 5 показано, что ряд (11.2) мажорируется рядом Маклорена функции $v_j(t, \varepsilon)$ из (5.6):

$$v_1 = \ldots = v_n = \frac{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon-\sqrt{\Delta})}{N(1+\varepsilon+\sqrt{\Delta})}, \qquad \Delta = (1+\varepsilon)^2 - 4\varepsilon e^{KNt}. \tag{11.5}$$

Так как $x_j(t, \varepsilon) \ll v_j(t, \varepsilon)(\arg \varepsilon)$, то справедливо неравенство (11.4), в середине которого стоит радиус сходимости ряда Маклорена функции (11.5) на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$. □

Теорема 11.2. *Пусть функция $F(x, t, \varepsilon)$ аналитична при $x \in D_x$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\varepsilon \in D_\varepsilon$. Пусть при $0 \leqslant t \leqslant T$*

$$F(x, t, \varepsilon) \ll \varphi_1(x, \varepsilon)(\arg x, \varepsilon), \tag{11.6}$$

$$\varphi_1(x, \varepsilon) \equiv \frac{KS}{1-S}, \qquad S \equiv \sum_{j=1}^{N} x_j + \varepsilon, \qquad K = \mathrm{const}.$$

Тогда ряд (11.2) *сходится к единственному решению задачи Коши* (11.1) *при* $0 \leqslant t \leqslant T$, $|\varepsilon| < \varepsilon_{**}$, *где* $\varepsilon_{**} \geqslant \rho$, ρ — *решение* (*единственное*) *уравнения*

$$\rho e^{-\rho} = e^{-1-KNT} \tag{11.7}$$

на интервале $0 < \rho < 1$.

Доказательство. Сходимость ряда (11.2) к решению задачи (11.1) следует из теоремы Пуанкаре 9.1. Оценим радиус сходимости. В § 5 показано, что ряд (11.2) мажорируется рядом Маклорена функции (5.6). Точно так же можно показать, что

$$x_j(t,\varepsilon) \ll v_j(t,\varepsilon)(\arg\varepsilon), \qquad j=\overline{1,N}, \tag{11.8}$$

где $v_j(t,\varepsilon)$ — решение задачи

$$\frac{dv_j}{dt}=\frac{KS'}{1-S'}, \quad v_j|_{t=0}=0, \quad j=\overline{1,N}, \quad S'=\sum_{j=1}^{N} v_j+\varepsilon,$$

имеющее вид

$$v_j=\frac{s-\varepsilon}{N}, \qquad j=\overline{1,N}, \qquad se^{-s}=\varepsilon e^{KNt-\varepsilon}. \tag{11.9}$$

Рассмотрим отображение

$$w=se^{-s} \tag{11.10}$$

комплексной плоскости s на комплексную плоскость w. Обозначим D_+ образ круга $|s|<1$ при отображении (11.10). Функция (11.10) однолистна в области $|s|<1$, так как $dw/ds=(1-s)e^{-s}\neq 0$ при $|s|<1$. Отсюда следует, что функция (11.10) имеет обратную функцию $s=f(w)$, аналитическую в области $D_+ \ni w$.

Рассмотрим отображение $w=g(t,\varepsilon)\equiv \varepsilon e^{KNt-\varepsilon}$ комплексной плоскости ε на плоскость w. Обозначим D_- образ круга $|\varepsilon|<\rho$ при этом отображении (ρ — решение уравнения (11.7)). Покажем, что $D_-\subset D_+$ при любом t из отрезка $0\leqslant t\leqslant T$.

а) Рассмотрим точки пересечения границ областей D_+, D_-. Пусть w_* — точка пересечения. Обозначим ее прообразы соответственно

$$s=e^{i\alpha}, \qquad \varepsilon=\rho e^{i\beta}, \qquad -\pi<\alpha\leqslant\pi, \qquad -\pi<\beta\leqslant\pi.$$

α, β являются решением следующих уравнений:

$$se^{-s}=g(t,\varepsilon), \qquad e^{i\alpha}e^{-\cos\alpha-i\sin\alpha}=\rho e^{i\beta}e^{KNt-\rho\cos\beta-\rho i\sin\beta}. \tag{11.11}$$

$$\begin{cases} e^{-\cos\alpha}=\rho e^{KNt-\rho\cos\beta}, \\ \alpha-\sin\alpha=\beta-\rho\sin\beta. \end{cases}$$

б) Непосредственно проверяется, что точка $\alpha=\beta=0$ является решением системы (11.11) при $t=T$ и не является решением системы при $t\neq T$.

в) Предположим, что точка $\alpha=\beta=\pi$ — решение системы (11.11). Тогда из (11.7), (11.11) следует:

$$e=\rho e^{KNt+\rho}=e^{\rho-1-KNT}e^{KNt+\rho},$$

$$1=2\rho-1-KN(T-t), \qquad 0\leqslant KN(T-t)=2(\rho-1)<0.$$

Получили противоречие. Поэтому точка $\alpha=\beta=\pi$ не является решением системы (11.11).

г) Из (11.11) следует: если $\alpha = \alpha_*$, $\beta = \beta_*$ — решение системы (11.11), то $\alpha = -\alpha_*$, $\beta = -\beta_*$ — тоже решение системы (11.11); если $\beta = 0$, то $\alpha = 0$; если $\beta = \pi$, то $\alpha = \pi$. Точки $\alpha = \beta = 0$, $\alpha = \beta = \pi$ уже рассмотрены. Поэтому достаточно рассмотреть решение системы (11.11) в области $-\pi < \alpha \leqslant \pi$, $0 < \beta < \pi$.

д) Из второго уравнения системы (11.11) следуют соотношения

$$0 = \alpha - \beta - \sin\alpha + \rho\sin\beta < \alpha - \beta - \sin\alpha + \sin\beta =$$

$$= (\alpha - \beta)\int\limits_0^1 2\sin^2\frac{\alpha - \theta\alpha + \theta\beta}{2}\,d\theta.$$

Если $(\alpha, \beta) \neq 0$, то интеграл положителен. Поэтому отсюда следует, что $\alpha > \beta$. Получили, что решение системы (11.11) достаточно рассмотреть в области $0 < \beta < \alpha \leqslant \pi$. В этой области

$$\cos\alpha < \cos\beta. \tag{11.12}$$

е) Из (11.7), (11.11), (11.12) следует:

$$e^{-\cos\alpha} = e^{\rho-1-KNT}e^{KNt-\rho\cos\beta},$$

$$-\cos\alpha = \rho - 1 - KN(T - t) - \rho\cos\beta,$$

$$-\cos\beta < \rho - 1 - KN(T - t) - \rho\cos\beta,$$

$$0 \leqslant KN(T - t) < (\rho - 1)(1 - \cos\beta) < 0.$$

Получили противоречие, из которого следует: при $t = T$ система (11.11) имеет единственное решение $\alpha = \beta = 0$. При $t \neq T$ система (11.11) не имеет решения.

Таким образом, границы областей D_+, D_- имеют единственную точку пересечения при $t = T$ и не пересекаются при $t \neq T$. Так как точки $s = 0$, $\varepsilon = 0$ переходят в точку $w = 0$, то отсюда следует, что одна из областей D_+, D_- вложена в другую. Чтобы установить, какая, рассмотрим прообразы точки

$$w = w_{**} \equiv -e. \tag{11.13}$$

Уравнения (11.10), (11.13) имеют решение $s = -1$, лежащее на окружности $|s| = 1$. Поэтому (11.13) лежит на границе области D_+.

Уравнение $w_{**} = g(t, \varepsilon)$ не имеет решения. Действительно, обозначим $\varepsilon = Re^{i\beta}$, $0 \leqslant R \leqslant \rho$. Справедливы соотношения

$$g(t, \varepsilon) = \varepsilon e^{KNt-\varepsilon} = Re^{i\beta}e^{KNt-R\cos\beta-Ri\sin\beta},$$

$$|g(t, \varepsilon)| = Re^{KNt-R\cos\beta} \leqslant \rho e^{KNt+\rho} = e^{\rho-1-KNT}e^{KNt+\rho} \leqslant$$

$$\leqslant e^{2\rho-1} < e = |w_{**}|.$$

Таким образом, точка (11.13) не принадлежит замыканию области D_-, и значит
$$D_- \subset D_+$$
при любом t из отрезка $0 \leqslant t \leqslant T$.

Отсюда следует, что при $0 \leqslant t \leqslant T$, $|\varepsilon| < \rho$ решение уравнения (11.9) относительно s имеет вид $s = f(g(t, \varepsilon))$, и значит $s(t, \varepsilon)$, $v(t, \varepsilon)$ — аналитические функции ε при $0 \leqslant t \leqslant T$, $|\varepsilon| < \rho$ по теореме об аналитичности сложной функции.

Из аналитичности следует, что радиус сходимости ряда Маклорена функции $v_j(t, \varepsilon)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ больше или равен ρ. Отсюда и из (11.8) получаем неравенство $\varepsilon_{**} \geqslant \rho$. □

Рассмотрим теперь задачу
$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + G(x, t, \varepsilon), \qquad x(0, \varepsilon) = 0. \tag{11.14}$$
Обозначим $U(t, s)$ матрицу Коши задачи
$$\frac{d\zeta}{dt} = A(t)\zeta.$$

Условие 11.1. *Матрица $A(t)$ непрерывна при $t \in D_t$.*

Условие 11.2. *Функция $G(x, t, \varepsilon)$ аналитична при $x \in D_x$, $t \in D_t$, $\varepsilon \in D_\varepsilon$; при $t \in D_t$*
$$G(x, t, \varepsilon) \ll \psi(x, \varepsilon)(\arg x, \varepsilon),$$
$$\psi(x, \varepsilon) \equiv \frac{K}{1 - x_1 - \ldots - x_N}\left[(x_1 + \ldots + x_N)^2 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right], \qquad K = \mathrm{const}.$$

Теорема 11.3. *Пусть при $D_t = \{t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$ выполняются условия* 11.1, 11.2. *Пусть матрица $U(t, s)$ удовлетворяет при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ неравенству*
$$\|U(t, s)\| \leqslant Ce^{\alpha(t-s)}, \tag{11.15}$$
где C, α — постоянные. Тогда ряд (11.2) *сходится к единственному решению задачи Коши* (11.14) *при $0 \leqslant t \leqslant T$, $|\varepsilon| < \varepsilon_{**}$, где*
$$\varepsilon_{**} \geqslant \frac{\alpha^2}{[\alpha + 2KNC(e^{\alpha T} - 1)]^2}. \tag{11.16}$$

Доказательство. Сходимость ряда (11.2) к решению задачи (11.14) следует из теоремы Пуанкаре 9.1. Оценим радиус сходимости. Так же, как при доказательстве теоремы 2.1 в § 3, показывается, что ряд (11.2) мажорируется рядом Маклорена функции (3.16), в которой нужно положить
$$K_2(t) = \frac{KC}{\alpha}\left(e^{\alpha t} - 1\right). \tag{11.17}$$

Формула для функции $K_2(t)$ следует из (3.13), (11.15) и из неравенств

$$K \int_0^t \|U(t,s)\|\, ds \leqslant K \int_0^t Ce^{\alpha(t-s)}\, ds = \frac{KC}{\alpha}\left(e^{\alpha t} - 1\right).$$

Так как $x(t,\varepsilon) \ll v(t,\varepsilon)(\arg\varepsilon)$, то справедливо неравенство (11.16), где справа стоит радиус сходимости ряда Маклорена функции (3.16), (11.17) на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$. □

Теорема 11.4. *Пусть при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 11.1, 11.2. *Пусть матрица* $U(t,s)$ *удовлетворяет при* $0 \leqslant s \leqslant t$ *неравенству*

$$\|U(t,s,\varepsilon)\| \leqslant Ce^{-\alpha(t-s)}, \tag{11.18}$$

где C, $\alpha > 0$ *— постоянные. Тогда ряд* (11.2) *сходится к единственному решению задачи Коши* (11.14) *при* $t \geqslant 0$, $|\varepsilon| < \varepsilon_{**}$, *где*

$$\varepsilon_{**} \geqslant \frac{\alpha^2}{(\alpha + 2KNC)^2}.$$

Доказательство. Заменим в теореме 11.3 постоянную α на $(-\alpha)$ и устремим $T \to \infty$. Получим теорему 11.4. □

Теорема 11.5. *Пусть при* $D_t = \{t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$ *выполняются условия* 11.1, 11.2. *Пусть матрица* $U(t,s)$ *удовлетворяет при* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ *неравенству*

$$\|U(t,s)\| \leqslant C^\circ (t-s)^\alpha + C, \tag{11.19}$$

где $C^\circ \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 0$, C *— постоянные. Тогда ряд* (11.2) *сходится к единственному решению задачи Коши* (11.14) *при* $0 \leqslant t \leqslant T$, $|\varepsilon| < \varepsilon_{**}$, *где*

$$\varepsilon_{**} \geqslant \frac{(1+\alpha)^2}{[1 + \alpha + 2KNT(C^\circ T^\alpha + C + C\alpha)]^2}. \tag{11.20}$$

Доказательство. Сходимость ряда (11.2) к решению задачи (11.14) следует из теоремы Пуанкаре 9.1. Оценим радиус сходимости. Так же, как при доказательстве теоремы 2.1 в § 3, показывается, что ряд (11.2) мажорируется рядом Маклорена функции (3.16), в которой нужно положить

$$K_2(t) = Kt\left(\frac{C^\circ t^\alpha}{1+\alpha} + C\right). \tag{11.21}$$

Формула для функции $K_2(t)$ следует из (3.13), (11.19) и из неравенства

$$K \int_0^t \|U(t,s)\|\, ds \leqslant K \int_0^t [C^\circ (t-s)^\alpha + C]\, ds = Kt\left(\frac{C^\circ t^\alpha}{1+\alpha} + C\right).$$

Так как $x(t,\varepsilon) \ll v(t,\varepsilon)(\arg\varepsilon)$, то справедливо неравенство (11.20), где справа стоит радиус сходимости ряда Маклорена функции (3.16), (11.21) на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$. □

Теорема 11.6. [35]. *Пусть* $A(t) = 0$; $G(x, t, \varepsilon)$ *аналитична при* $x \in D_x$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\varepsilon \in D_\varepsilon$; *при* $0 \leqslant t \leqslant T$

$$G(x, t, \varepsilon) \ll \psi_*(x, \varepsilon)(\arg x, \varepsilon), \tag{11.22}$$

$$\psi_*(x, \varepsilon) = \frac{K\varepsilon}{(1-\varepsilon)(1 - x_1 - \ldots - x_N)}.$$

Тогда ряд (11.2) *сходится к единственному решению задачи Коши* (11.14) *при* $0 \leqslant t \leqslant T$, $|\varepsilon| < \varepsilon_{**}$, *где*

$$\varepsilon_{**} \geqslant \frac{1}{1 + 2KNT}. \tag{11.23}$$

Доказательство. Сходимость ряда (11.2) к решению задачи (11.14) следует из теоремы Пуанкаре 9.1. Оценим радиус сходимости. В § 5 показано, что ряд (11.2) мажорируется рядом Маклорена функции (5.6). Точно так же можно показать, что

$$x_j(t, \varepsilon) \ll v_j(t, \varepsilon)(\arg \varepsilon), \tag{11.24}$$

где $v_j(t, \varepsilon)$ — решение задачи

$$\frac{dv_j}{dt} = \psi_*(v, \varepsilon), \qquad v_j|_{t=0} = 0, \qquad j = \overline{1, N},$$

имеющее вид

$$v_j(t, \varepsilon) = \frac{1}{N} - \frac{1}{N}\sqrt{1 - \frac{2KN\varepsilon t}{1-\varepsilon}}. \tag{11.25}$$

Функция (11.25) аналитична по ε при $0 \leqslant t \leqslant T$, $|\varepsilon| < (1 + 2KNT)^{-1}$. Отсюда и из (11.24) следует неравенство (11.23). □

Замечание 11.1. В [18] написано, что при выполнении условий теоремы 11.2 ряд (11.2) сходится к единственному решению задачи (11.1) при $0 \leqslant t \leqslant T$, $|\varepsilon| < e^{-KNT}$. Этот результат ошибочен. Рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x + \varepsilon}{1 - x - \varepsilon}, \qquad x(0, \varepsilon) = 0 \tag{11.26}$$

на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$. Здесь $K = N = 1$. Решение $x = x(t, \varepsilon)$, как неявная функция, определяется равенством

$$(x + \varepsilon)e^{-x-\varepsilon} = \varepsilon e^{t-\varepsilon}.$$

Нетрудно проверить, что производная $\partial x/\partial \varepsilon$ не существует в точке $t = T$, $\varepsilon = \rho$, где ρ — решение уравнения (11.7) на интервале $(0, 1)$. Таким образом, для задачи (11.26) $\varepsilon_{**} = \rho$. Так как $\rho < 1$, $\rho = e^{\rho-1-T}$, то $\rho < e^{-T} = e^{-KNT}$. Отсюда следует: при $t = T$, $\rho < |\varepsilon| < e^{-KNT}$ ряд (11.2) расходится.

§ 12. Оценка интервала времени сходимости

Во многих случаях малый параметр ε имеет фиксированное (хотя и достаточно малое) значение, а решение требуется найти на возможно большем интервале независимой переменной t. Поэтому возникает задача: найти такое значение $T > 0$, что при $0 \leqslant t < T$ и заданном значении ε ряд (11.2) сходится к решению задачи (11.1). Рассмотрим оценки T.

Теорема 12.1. *Пусть функция $F(x, t, \varepsilon)$ аналитична при $x \in D_x$, $t \geqslant 0$, $\varepsilon \in D_\varepsilon$ и при $t \geqslant 0$*

$$F(x, t, \varepsilon) \ll \varphi(x, \varepsilon)(\arg x, \varepsilon),$$

где $\varphi(x, \varepsilon)$ — функция (11.3). *Тогда для любого ε, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, ряд* (11.2) *сходится к единственному решению задачи* (11.1) *при $0 \leqslant t < T$, где*

$$T \geqslant \frac{1}{KN} \ln \frac{(1+\varepsilon)^2}{4\varepsilon}. \tag{12.1}$$

Доказательство. Сходимость ряда (11.2) к решению задачи (11.1) следует из теоремы 9.9. Оценим T. Из доказательства теоремы 11.1 следует, что ряд (11.2) мажорируется рядом Маклорена функции (11.5), который сходится при

$$t \geqslant 0, \qquad |\varepsilon| < 2e^{KNt} - 1 - 2\sqrt{e^{KNt}\left(e^{KNt} - 1\right)}. \tag{12.2}$$

Решим (12.2) относительно t при $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Получим, что пересечение множества (12.2) с множеством $0 \leqslant \varepsilon < 1$ описывается неравенствами

$$0 \leqslant t < \frac{1}{KN} \ln \frac{(1+\varepsilon)^2}{4\varepsilon}, \qquad 0 \leqslant \varepsilon < 1.$$

Так как $x_j(t, \varepsilon) \ll v_j(t, \varepsilon)(\arg \varepsilon)$, $j = \overline{1, N}$, то отсюда следует (12.1). □

Теорема 12.2. *Пусть функция $F(x, t, \varepsilon)$ аналитична при $x \in D_x$, $t \geqslant 0$, $\varepsilon \in D_\varepsilon$ и при $t \geqslant 0$*

$$F(x, t, \varepsilon) \ll \varphi_1(x, \varepsilon)(\arg x, \varepsilon),$$

где $\varphi_1(x, \varepsilon)$ — функция (11.6). *Тогда для любого ε, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, ряд* (11.2) *сходится к единственному решению задачи* (11.1) *при $0 \leqslant t < T$, где*

$$T \geqslant \frac{\varepsilon - 1 - \ln \varepsilon}{KN}. \tag{12.3}$$

Доказательство. Сходимость ряда (11.2) к решению задачи (11.1) следует из теоремы 9.9. Оценим T. Из доказательства теоремы 11.2 следует, что ряд (11.2) мажорируется рядом Маклорена функции (11.9), которая аналитична по ε в круге $|\varepsilon| < \rho$, где ρ — единственное на интервале $(0, 1)$ решение уравнения

$$\rho e^{-\rho} = e^{-1-KNt}.$$

При $0 \leqslant \varepsilon < 1$ отсюда получаем неравенства

$$e^{-1-KNt} = \rho e^{-\rho} > \varepsilon e^{-\varepsilon}; \qquad t < \frac{\varepsilon - 1 - \ln \varepsilon}{KN}.$$

Таким образом, $v_j(t, \varepsilon)$ разлагается в ряд по степеням ε, сходящийся при

$$0 \leqslant t < \frac{\varepsilon - 1 - \ln \varepsilon}{KN}, \qquad 0 \leqslant \varepsilon < 1.$$

Так как $x_j(t, \varepsilon) \ll v_j(t, \varepsilon)(\arg \varepsilon)$, $j = \overline{1, N}$, то отсюда следует (12.3). □

Теорема 12.3. *Пусть при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 11.1, 11.2. *Пусть при* $0 \leqslant s \leqslant t$ *матрица* $U(t, s)$ *удовлетворяет неравенству* (11.15), *где* $\alpha > 0$. *Тогда ряд* (11.2) *сходится к единственному решению задачи* (11.14) *при* $0 \leqslant t < T$, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, *где*

$$T \geqslant \frac{1}{\alpha} \ln \left[1 + \frac{\alpha(1 - \sqrt{\varepsilon})}{2KNC\sqrt{\varepsilon}}\right]. \tag{12.4}$$

Доказательство. Сходимость ряда (11.2) к решению задачи (11.14) следует из теоремы 9.9. Оценим T. Из доказательства теоремы 11.3 следует, что ряд (11.2) мажорируется рядом Маклорена функции (3.16), (11.17), который сходится при

$$t \geqslant 0, \qquad |\varepsilon| < \frac{\alpha^2}{\left[\alpha + 2KNC\left(e^{\alpha t} - 1\right)\right]^2}. \tag{12.5}$$

Решим (12.5) относительно t при $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Получим, что пересечение множества (12.5) с множеством $0 \leqslant \varepsilon < 1$ описывается неравенствами

$$0 \leqslant t < \frac{1}{\alpha} \ln \left[1 + \frac{\alpha(1 - \sqrt{\varepsilon})}{2KNC\sqrt{\varepsilon}}\right], \qquad 0 \leqslant \varepsilon < 1.$$

Так как $x_j(t, \varepsilon) \ll v_j(t, \varepsilon)(\arg \varepsilon)$, $j = \overline{1, N}$, то отсюда следует (12.4). □

Теорема 12.4. *Пусть при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 11.1, 11.2. *Пусть при* $0 \leqslant s \leqslant t$ *матрица* $U(t, s)$ *удовлетворяет неравенству* (11.18), *где* $\alpha > 0$. *Тогда ряд* (11.2) *сходится к единственному решению задачи* (11.14) *при* $0 \leqslant t < T$, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, *где*

$$\begin{aligned} &T = \infty, && \text{если} \quad 0 \leqslant \varepsilon < \frac{\alpha^2}{(\alpha + 2KNC)^2}; \\ &T \geqslant -\frac{1}{\alpha} \ln \left[1 - \frac{(1 - \sqrt{\varepsilon})\alpha}{2KNC\sqrt{\varepsilon}}\right], && \text{если} \quad \frac{\alpha^2}{(\alpha + 2KNC)^2} \leqslant \varepsilon < 1. \end{aligned} \tag{12.6}$$

Доказательство. Сходимость ряда (11.2) к решению задачи (11.14) следует из теоремы 9.9. Оценим T. Из доказательства теоремы 11.3 следует, что ряд (11.2) мажорируется рядом Маклорена функции, описываемой формулами (3.16), (11.17), если в формулах сделать замену α на $-\alpha$. Ряд Маклорена сходится при

$$t \geqslant 0, \qquad |\varepsilon| < \frac{\blacksquare^2}{\left[\alpha + 2KNC\left(1 - e^{-\alpha t}\right)\right]^2}. \tag{12.7}$$

Решим (12.7) относительно t при $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Получим, что пересечение множества (12.7) с множеством $0 \leqslant \varepsilon < 1$ описывается неравенствами

$$t \geqslant 0, \qquad \text{если} \quad 0 \leqslant \varepsilon < \frac{\alpha^2}{(\alpha + 2KNC)^2};$$

$$0 \leqslant t < -\frac{1}{\alpha} \ln \left[1 - \frac{(1 - \sqrt{\varepsilon})\alpha}{2KNC\sqrt{\varepsilon}}\right], \quad \text{если} \quad \frac{\alpha^2}{(\alpha + 2KNC)^2} \leqslant \varepsilon < 1.$$

Так как $x_j(t, \varepsilon) \ll v_j(t, \varepsilon)(\arg \varepsilon)$, $j = \overline{1, N}$, то отсюда следует (12.6). □

Теорема 12.5. *Пусть при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 11.1, 11.2. *Пусть при* $0 \leqslant s \leqslant t$ *матрица* $U(t, s)$ *удовлетворяет неравенству* (11.19), *где* $C^\circ \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 0$. *Тогда ряд* (11.2) *сходится к единственному решению задачи* (11.14) *при* $0 \leqslant t < T$, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, *где* $T \geqslant T_*$, $T_* > 0$ *— корень (единственный) уравнения*

$$2KNT\left(\frac{C^\circ T^\alpha}{1 + \alpha} + C\right) = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{12.8}$$

Доказательство. Сходимость ряда (11.2) к решению задачи (11.14) следует из теоремы 9.9. Оценим T. Из доказательства теоремы 11.5 следует, что ряд (11.2) мажорируется рядом Маклорена функции (3.16), (11.21), который сходится при

$$t \geqslant 0, \qquad |\varepsilon| < \frac{(1 + \alpha)^2}{\left[1 + \alpha + 2KNt\left(C^\circ t^\alpha + C + C\alpha\right)\right]^2}. \tag{12.9}$$

Решим (12.9) относительно t при $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Получим, что пересечение множества (12.9) с множеством $0 \leqslant \varepsilon < 1$ описывается неравенствами

$$0 \leqslant t < T_*, \qquad 0 \leqslant \varepsilon < 1,$$

где $T_* > 0$ — единственный корень уравнения (12.8). Так как $x_j(t, \varepsilon) \ll v_j(t, \varepsilon)(\arg \varepsilon)$, $j = \overline{1, N}$, то отсюда следует, что $T \geqslant T_*$. □

Теорема 12.6. *Пусть* $A(t, \varepsilon) = 0$, *функция* $G(x, t, \varepsilon)$ *аналитична при* $x \in D_x$, $t \geqslant 0$, $\varepsilon \in D_\varepsilon$; *при* $t \geqslant 0$

$$G(x, t, \varepsilon) \ll \psi_*(x, \varepsilon)(\arg x, \varepsilon),$$

$\psi_*(x, \varepsilon)$ — функция (11.22). *Тогда ряд* (11.2) *сходится к единственному решению задачи* (11.14) *при* $0 \leqslant t < T$, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, *где*

$$T \geqslant \frac{1-\varepsilon}{2KN\varepsilon}. \tag{12.10}$$

Доказательство. Сходимость ряда (11.2) к решению задачи (11.14) следует из теоремы 9.9. Оценим T. Из доказательства теоремы 11.6 следует, что ряд (11.2) мажорируется рядом Маклорена функции (11.25), который сходится при

$$t \geqslant 0, \qquad |\varepsilon| < \frac{1}{1+2KNt}. \tag{12.11}$$

Решим (12.11) относительно t при $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Получим, что пересечение множества (12.11) с множеством $0 \leqslant \varepsilon < 1$ описывается неравенствами

$$0 \leqslant t < \frac{1-\varepsilon}{2KN\varepsilon}, \qquad 0 \leqslant \varepsilon < 1.$$

Так как $x_j(t, \varepsilon) \ll v_j(t, \varepsilon)(\arg \varepsilon)$, $j = \overline{1, N}$, то отсюда следует (12.10). □

§ 13. Оценка нормы матрицы Коши, I

Обозначим $\lambda_1(t)$, ..., $\lambda_N(t)$ собственные значения матрицы $A(t)$. Приведем формулировки теорем об оценках нормы матрицы Коши $U(t, s)$ системы

$$\frac{d\zeta}{dt} = A(t)\zeta.$$

Теорема 13.1. [4]. *Пусть матрица A не зависит от t. Тогда для любого $\varkappa$, $\varkappa > \max\limits_{j=\overline{1,N}} \operatorname{Re}\lambda_j$, найдется такая постоянная $C \geqslant 1$, что при* $0 \leqslant s \leqslant t \quad \|U(t, s)\| \leqslant Ce^{\varkappa(t-s)}$.

Теорема 13.2. [17]. *Пусть матрица A не зависит от t и $\operatorname{Re}\lambda_j \leqslant 0$, $j = \overline{1, N}$. Тогда найдутся такие постоянные $\varkappa$, C°, C, что $\varkappa \geqslant 0$ — целое число, $C^\circ \geqslant 0$, $C \geqslant 1$ и при $0 \leqslant s \leqslant t \quad \|U(t, s)\| \leqslant C^\circ(t-s)^\varkappa + C$.*

Постоянные $\varkappa$, C°, C в теоремах 13.1, 13.2 можно получить в явном виде, если вычислить матрицу $U(t, s)$.

Теорема 13.3. *Пусть матрица $A(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$. Пусть $\lambda_*(t)$ — наибольшее собственное значение матрицы $S(t) \equiv 1/2[A(t) + A'(t)]$, где $A'(t)$ — транспонированная матрица. Тогда при $0 \leqslant s \leqslant t$*

$$\|U(t, s)\| \leqslant N \exp\left\{ \int\limits_s^t \lambda_*(q)\, dq \right\}.$$

Доказательство. Матрица $U(t, s)$ состоит из столбцов $u_1(t, s)$, ..., $u_N(t, s)$, являющихся решением задачи Коши

$$\frac{du_j}{dt} = A(t)u_j, \quad u_{ij}(s, s) = \delta_{ij}, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N},$$

u_{ij} — компоненты вектора u_j, δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$). При $0 \leqslant s \leqslant t$ справедливо неравенство Важевского [17]

$$\sum_{i=1}^{N} u_{ij}^2(t, s) \leqslant \sum_{i=1}^{N} u_{ij}^2(s, s) \cdot \exp\left\{2 \int_s^t \lambda_*(q)\, dq\right\} = \exp\left\{2 \int_s^t \lambda_*(q)\, dq\right\}.$$

Отсюда следует:

$$\|U(t, s)\| = \max_{i=\overline{1,N}} \sum_{j=1}^{N} |u_{ij}(t, s)| \leqslant \sum_{i,j=1}^{N} |u_{ij}(t, s)| \leqslant \sqrt{N \sum_{i,j=1}^{N} u_{ij}^2(t, s)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{N \sum_{j=1}^{N} \exp\left\{2 \int_s^t \lambda_*(q)\, dq\right\}} = N \exp\left\{\int_s^t \lambda_*(q)\, dq\right\}. \qquad \square$$

Теорема 13.4. *Пусть выполняются условия: $A(t)$ непрерывна и ограничена по норме при $t \geqslant 0$; при $0 \leqslant s \leqslant t$ справедливо условие Лаппо-Данилевского*

$$A(t) \cdot \int_s^t A(q)\, dq = \int_s^t A(q)\, dq \cdot A(t); \tag{13.1}$$

при $T \to \infty$ матрица $[T^{-1} \int_s^{s+T} A(q)\, dq]$ сходится к постоянной матрице A_* равномерно на множестве $s \geqslant 0$. Тогда для любого κ $\left(\kappa > \kappa_* \equiv \max_{j=\overline{1,N}} \mathrm{Re}\lambda_{j*},\ \lambda_{j*}\right.$ — собственные значения матрицы $\left.A_*\right)$ найдется такое значение $C \geqslant 1$, что при $0 \leqslant s \leqslant t$ $\|U(t, s)\| \leqslant Ce^{\kappa(t-s)}$.

Доказательство. Обозначим

$$B(t, s) \equiv (t - s)^{-1} \cdot \int_s^t A(q)\, dq - A_*.$$

По условию матрица $B(s+T, s)$ стремится при $T \to \infty$ к нулевой матрице равномерно на множестве $s \geqslant 0$. При выполнении равенства (13.1)

матрица Коши имеет вид [17]

$$U(t, s) = \exp\left\{ \int_s^t A(q)\,dq \right\}. \tag{13.2}$$

Отсюда следуют равенства

$$U(t, s) = \exp\left\{ A_*(t-s) + B(t, s)(t-s) \right\} = \\ = U_*(t, s) \cdot \exp\left\{ B(t, s)(t-s) \right\}. \tag{13.3}$$

Здесь $U_*(t, s) = \exp\{A_*(t-s)\}$ — матрица Коши системы $d\zeta_*/dt = A_*\zeta_*$. Последнее равенство (13.3) справедливо в силу перестановочности матриц A_*, B [17]. Из теоремы 13.1 следует: существует такая постоянная $C_1 \geqslant 1$, что при $0 \leqslant s \leqslant t$

$$\|U_*(t, s)\| \leqslant C_1 \exp\left\{ \frac{(\kappa + \kappa_*)(t-s)}{2} \right\}. \tag{13.4}$$

Так как матрица $B(s+T, s)$ сходится к нулевой матрице равномерно, то существует значение T_*, не зависящее от s и такое, что при $t \geqslant T_* + s$, $s \geqslant 0$ выполняется неравенство $\|B(t, s)\| \leqslant (\kappa - \kappa_*)/2$. Отсюда и из (13.3), (13.4) следует, что при $t \geqslant T_* + s$, $s \geqslant 0$

$$\|U(t, s)\| \leqslant \|U_*(t, s)\| \cdot \exp\left\{ \|B(t, s)\| \cdot (t-s) \right\} \leqslant \\ \leqslant C_1 \exp\left\{ \frac{(\kappa + \kappa_*)(t-s)}{2} + \frac{(\kappa - \kappa_*)(t-s)}{2} \right\} = C_1 e^{\kappa(t-s)}. \tag{13.5}$$

Рассмотрим множество $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T_* + s$. Пусть C_2 — постоянная, ограничивающая по условию норму матрицы $A(t)$. Тогда из (13.2) следуют неравенства

$$\|U(t, s)\| \leqslant \exp\left\{ \int_s^t \|A(q)\|\,dq \right\} \leqslant \exp\left\{ C_2(t-s) \right\} = \\ = \exp\left\{ (C_2 - \kappa)(t-s) \right\} \cdot \exp\left\{ \kappa(t-s) \right\} \leqslant C_3 e^{\kappa(t-s)}. \tag{13.6}$$

Здесь $C_3 \equiv \max\Big\{1, \exp\left\{(C_2 - \kappa)T_*\right\}\Big\}$. Из (13.5), (13.6) получим неравенство, справедливое при $0 \leqslant s \leqslant t$:

$$\|U(t, s)\| \leqslant C e^{\kappa(t-s)}, \quad C \equiv \max(C_1, C_3) \geqslant 1. \qquad \square$$

Лемма 13.1. (*Гронуолла — Беллмана* [17]). *Пусть $C \geqslant 0$ — постоянная, $f(t) \geqslant 0$, $g(t) \geqslant 0$ — непрерывные на $[t_0, t_1]$ функции, удовлетворяющие неравенству*

$$f(t) \leqslant C + \int\limits_{t_0}^{t} f(s) \cdot g(s)\, ds, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Тогда при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ $f(t) \leqslant C \exp\left\{ \int\limits_{t_0}^{t} g(s)\, ds \right\}$.

Теорема 13.5. *Пусть $A(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$ и имеет предел при $t \to \infty$: $A_* \equiv \lim\limits_{t\to\infty} A(t)$. Тогда для любого κ $\Big(\kappa > \kappa_* \equiv \max\limits_{j=\overline{1,N}} \lambda_{j*}$, λ_{j*} — собственные значения матрицы $A_*\Big)$ найдется такое значение $C \geqslant 1$, что при $0 \leqslant s \leqslant t$*

$$\|U(t, s)\| \leqslant C \exp\big\{\kappa(t - s)\big\}. \tag{13.7}$$

Доказательство. Матрица Коши удовлетворяет дифференциальному уравнению $\partial U(t, s)/\partial t = A(t) \cdot U(t, s)$, которое запишем в виде

$$\frac{\partial U(t, s)}{\partial t} = A_* U(t, s) + B(t) \cdot U(t, s), \qquad B(t) \equiv A(t) - A_*. \tag{13.8}$$

По условию матрица $B(t)$ стремится к нулевой матрице при $t \to \infty$. Уравнение (13.8) при условии $U(s, s) = E$ эквивалентно интегральному уравнению

$$U(t, s) = U_*(t, s) + \int\limits_{s}^{t} U_*(t, q) \cdot B(q) \cdot U(q, s)\, dq. \tag{13.9}$$

Здесь $U_*(t, s)$ — матрица Коши системы $d\zeta_*/dt = A_*\zeta_*$. Из теоремы 13.! следует: существует такое значение $C_1 \geqslant 1$, что при $0 \leqslant s \leqslant t$

$$\|U_*(t, s)\| \leqslant C_1 \exp\left\{ \frac{(\kappa + \kappa_*)(t - s)}{2} \right\}. \tag{13.10}$$

Отсюда и из (13.9) получим:

$$\begin{aligned} \|U(t,s)\| &\leqslant \|U_*(t,s)\| + \int\limits_{s}^{t} \|U_*(t,q)\| \cdot \|B(q)\| \cdot \|U(q,s)\|\, dq \leqslant \\ &\leqslant C_1 \exp\left\{ \frac{(\kappa+\kappa_*)(t-s)}{2} \right\} + \\ &\quad + \int\limits_{s}^{t} C_1 \exp\left\{ \frac{(\kappa+\kappa_*)(t-q)}{2} \right\} \cdot \|B(q)\| \cdot \|U(q,s)\|\, dq. \end{aligned} \tag{13.11}$$

Введем обозначение

$$\omega(t, s) \equiv \exp\left\{-\frac{(\kappa+\kappa_*)t}{2}\right\} \cdot \|U(t, s)\|. \tag{13.12}$$

Тогда из (13.11) следует неравенство

$$\omega(t, s) \leqslant C_1 \exp\left\{-\frac{(\kappa+\kappa_*)s}{2}\right\} + \int\limits_s^t C_1 \cdot \|B(q)\| \cdot \omega(q, s)\, dq,$$

удовлетворяющее условиям леммы Гронуолла — Беллмана. Поэтому

$$\omega(t, s) \leqslant C_1 \exp\left\{-\frac{(\kappa+\kappa_*)s}{2} + \int\limits_s^t C_1 \cdot \|B(q)\|\, dq\right\}. \tag{13.13}$$

Выберем T так, чтобы при $t \geqslant T$ выполнялось неравенство

$$\|B(t)\| \leqslant \frac{\kappa - \kappa_*}{2C_1}. \tag{13.14}$$

Тогда при $T \leqslant s \leqslant t$ из (13.12), (13.13) следует:

$$\begin{gathered} \omega(t, s) \leqslant C_1 \exp\left\{-\frac{(\kappa+\kappa_*)s}{2} + \frac{(\kappa-\kappa_*)(t-s)}{2}\right\}, \\ \|U(t, s)\| = \exp\left\{\frac{(\kappa+\kappa_*)t}{2}\right\} \cdot \omega(t, s) \leqslant C_1 \cdot e^{\kappa(t-s)}. \end{gathered} \tag{13.15}$$

Пусть теперь $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. Тогда $U(t, s)$, как непрерывная матрица, ограничена по норме некоторой постоянной C_2. Поэтому

$$\begin{aligned} \|U(t, s)\| \leqslant C_2 = C_2 \exp\{-\kappa(t-s)\} \cdot \exp\{\kappa(t-s)\} \leqslant \\ \leqslant C_3 \exp\{\kappa(t-s)\}, \end{aligned} \tag{13.16}$$

где $C_3 \equiv C_2 \max\left(1, e^{-\kappa T}\right)$.

Рассмотрим множество $0 \leqslant s \leqslant T \leqslant t$. Матрица Коши удовлетворяет интегральному уравнению

$$U(t, s) = U_*(t, T) \cdot U(T, s) + \int\limits_T^t U_*(t, q) \cdot B(q) \cdot U(q, s)\, dq.$$

Отсюда и из (13.10), (13.12), (13.14), (13.16) следует:

$$\|U(t,s)\| \leqslant \|U_*(t,T)\| \cdot \|U(T,s)\| + \int\limits_T^t \|U_*(t,q)\| \cdot \|B(q)\| \cdot \|U(q,s)\|\,dq \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \exp\left\{\frac{(\kappa+\kappa_*)(t-T)}{2}\right\} \cdot C_3 \exp\{\kappa(T-s)\} +$$
$$+ \int\limits_T^t C_1 \exp\left\{\frac{(\kappa+\kappa_*)(t-q)}{2}\right\} \cdot \frac{\kappa-\kappa_*}{2C_1} \cdot \|U(q,s)\|\,dq,$$

$$\omega(t,s) \leqslant C_1C_3 \exp\left\{\frac{(\kappa-\kappa_*)T}{2} - \kappa s\right\} + \frac{1}{2}\int\limits_T^t (\kappa-\kappa_*)\cdot\omega(q,s)\,dq.$$

Полученное неравенство удовлетворяет условиям леммы Гронуолла — Беллмана. Поэтому

$$\omega(t,s) \leqslant C_1C_3 \exp\left\{\frac{(\kappa-\kappa_*)T}{2} - \kappa s + \frac{1}{2}\int\limits_T^t (\kappa-\kappa_*)\,dq\right\} =$$
$$= C_1C_3 \exp\left\{\frac{(\kappa-\kappa_*)t}{2} - \kappa s\right\}.$$

Отсюда и из (13.12) получаем

$$\|U(t,s)\| \leqslant C_1C_3 e^{\kappa(t-s)}. \tag{13.17}$$

Из (13.15)–(13.17) следует окончательный результат: при $0 \leqslant s \leqslant t$ выполняется неравенство (13.7), где $C \equiv \max(C_1, C_3, C_1C_3) \geqslant 1$. □

Замечание 13.1. Норму матрицы Коши можно оценить, используя оценки решений линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Обзор оценок таких решений (включающий результаты А. Д. Горбунова, Б. С. Разумихина и др.) содержится в [1]. Матрицу Коши для широкого круга задач можно оценить с помощью результатов работы [2].

Замечание 13.2. Оценки нормы матрицы Коши для сингулярно возмущенных уравнений даны в § 60.

§ 14. Выводы главы 1

В главе 1 рассматривается *почти регулярная задача Коши*. Определение почти регулярной задачи Коши вводится в § 1. Кроме того, в § 1 описано построение решения задачи в виде ряда по степеням малого параметра с коэффициентами, зависящими от времени и малого параметра. В § 2 сформулированы теоремы о том, что построенный в § 1 ряд сходится к решению задачи или является асимптотическим решением

на отрезке (теоремы 2.1, 2.5), на всей оси (теоремы 2.2, 2.6), на асимптотически больших интервалах времени (теоремы 2.3, 2.4, 2.7, 2.8). Теорема 2.9 гарантирует сходимость построенного ряда к решению задачи при фиксированном значении малого параметра на ненулевом интервале времени. Теоремы 2.10, 2.11 позволяют получить численные оценки: остаточного члена асимптотического разложения решения, интервала времени существования решения, области значений малого параметра. Теорема 2.11 аналогична теоремам Ляпунова, Румянцева. Доказательство теорем 2.1–2.11 дано в § 3–§ 7. В § 8 приводятся простые примеры почти регулярной задачи Коши.

В § 9 рассмотрен частный случай почти регулярной задачи Коши — *регулярно возмущенная задача Коши*. Для регулярно возмущенной задачи Коши метод решения совпадает с методом малого параметра Пуанкаре, теоремы 2.1–2.11 переходят соответственно в теоремы 9.1–9.11. Теорема 9.1 является теоремой Пуанкаре. В § 10 приводятся простые примеры регулярно возмущенной задачи Коши.

Для регулярно возмущенной задачи Коши рассмотрены оценки радиуса сходимости ряда Пуанкаре (§ 11), оценки интервала времени, на котором ряд Пуанкаре сходится при фиксированном значении малого параметра (§ 12).

Эффективность решения почти регулярной задачи Коши и регулярно возмущенной задачи Коши существенно зависит от поведения матрицы Коши для уравнений в вариациях. В § 13 приводятся оценки нормы матрицы Коши. Дополнительные оценки нормы матрицы Коши даны в § 60 второй части.

Глава 2

Задача Ван дер Поля

§ 15. Переход к почти регулярной задаче Коши

15.1. О регулярности и сингулярности задачи Ван дер Поля

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Ван дер Поля:

$$\begin{gathered}
\frac{d^2 w}{d\tau^2} - \varepsilon\left(1 - w^2\right)\frac{dw}{d\tau} + w = 0, \\
w|_{\tau=0} = w^\circ, \qquad \left.\frac{dw}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \dot{w}^\circ.
\end{gathered} \tag{15.1}$$

Здесь w — искомая скалярная функция, τ — независимая переменная, ε — малый параметр; w°, $\dot{w}^\circ$ — постоянные, не зависящие от ε. Задачу (15.1) назовем *задачей Ван дер Поля.*

При $w^\circ = 0$, $\dot{w}^\circ = 0$ решение задачи (15.1) равно нулю: $w = 0$. Поэтому будем предполагать, что

$$(w^\circ)^2 + (\dot{w}^\circ)^2 \neq 0.$$

Перейдем от (15.1) к уравнениям в форме Коши. Для этого введем новые переменные

$$\widetilde{x}_1 \equiv w, \qquad \widetilde{x}_2 \equiv \frac{dw}{d\tau}. \tag{15.2}$$

Из (15.1), (15.2) получим уравнения для $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_2$:

$$\begin{gathered}
\frac{d\widetilde{x}_1}{d\tau} = \widetilde{x}_2, \qquad \frac{d\widetilde{x}_2}{d\tau} = -\widetilde{x}_1 + \varepsilon\widetilde{x}_2(1 - \widetilde{x}_1^2), \\
\widetilde{x}_1|_{\tau=0} = w^\circ, \qquad \widetilde{x}_2|_{\tau=0} = \dot{w}^\circ.
\end{gathered} \tag{15.3}$$

На отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant T$ задача (15.3) является регулярно возмущенной задачей Коши по определению 9.1. Для ее решения можно применить метод малого параметра Пуанкаре и теорию, изложенную в § 9. Таким образом, на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant T$ задача (15.1) эквивалентна регулярно возмущенной задаче Коши (15.3).

Покажем, что на интервале времени τ порядка ε^{-1} задача (15.3) является сингулярно возмущенной. Для этого введем новую независимую переменную t по формуле

$$t \equiv \tau\varepsilon. \tag{15.4}$$

Интервал $0 \leqslant \tau \leqslant T\varepsilon^{-1}$ соответствует отрезку $0 \leqslant t \leqslant T$. Выразив в (15.3) τ через t из формулы (15.4), получим задачу

$$\begin{aligned} &\varepsilon\frac{d\widetilde{x}_1}{dt} = \widetilde{x}_2, \qquad \varepsilon\frac{d\widetilde{x}_2}{dt} = -\widetilde{x}_1 + \varepsilon\widetilde{x}_2(1-\widetilde{x}_1^2), \\ &\widetilde{x}_1|_{t=0} = w^\circ, \qquad \widetilde{x}_2|_{t=0} = \dot{w}^\circ, \end{aligned} \tag{15.5}$$

которая является сингулярно возмущенной задачей Коши по определению 22.1. Таким образом, на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant T/\varepsilon$ задача (15.1) эквивалентна сингулярно возмущенной задаче Коши (15.5). Для ее решения обычно используется метод осреднения [15]. В этой книге задача Ван дер Поля решается методами теории почти регулярной задачи Коши, изложенной в главе 1.

15.2. Переход к почти регулярной задаче Коши

Обозначим

$$r \equiv \sqrt{w^2 + \left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2}, \qquad \varphi \equiv \arg\left(w + i\frac{dw}{d\tau}\right). \tag{15.6}$$

Обратные к (15.6) формулы:

$$w = r\cos\varphi, \qquad \frac{dw}{d\tau} = r\sin\varphi. \tag{15.7}$$

Перейдем к новым переменным x_1, x_2, t по формулам

$$\begin{aligned} &x_1 \equiv r - a(t) - \varepsilon g_1(r,\varphi), \quad x_2 \equiv \varphi - \alpha(t,\varepsilon) - \varepsilon g_2(r,\varphi), \quad t \equiv \varepsilon\tau, \\ &a(t) \equiv \frac{2}{\sqrt{1+C_0e^{-t}}}, \qquad \alpha(t,\varepsilon) \equiv \varphi^\circ - \frac{t}{\varepsilon}, \qquad C_0 \equiv \frac{4}{(r^\circ)^2} - 1, \\ &g_1(r,\varphi) \equiv \frac{r}{4}\sin 2\varphi - \frac{r^3}{32}\sin 4\varphi + C_1, \quad g_2(r,\varphi) \equiv \frac{1}{2}\cos^2\varphi - \frac{r^2}{4}\cos^4\varphi + C_2, \\ &C_1 \equiv -\frac{r^\circ}{4}\sin 2\varphi^\circ + \frac{(r^\circ)^3}{32}\sin 4\varphi^\circ, \qquad C_2 \equiv -\frac{1}{2}\cos^2\varphi^\circ + \frac{(r^\circ)^2}{4}\cos^4\varphi^\circ, \\ &r^\circ \equiv \sqrt{(w^\circ)^2 + (\dot{w}^\circ)^2}, \qquad \varphi^\circ \equiv \arg(w^\circ + i\dot{w}^\circ). \end{aligned} \tag{15.8}$$

Укажем аргументы функций (15.8):

$x \equiv (x_1, x_2)$, $\quad x = x(t,\varepsilon)$ – искомая функция,

t – независимая переменная, $\quad \varepsilon$ – малый параметр,

$r^\circ, \varphi^\circ, C_0, C_1, C_2$ – постоянные, не зависящие от x, t, ε,

$r = r(x,t,\varepsilon)$, $\qquad \varphi = \varphi(x,t,\varepsilon)$.

Новые переменные x_1, x_2 являются решением следующей задачи:

$$
\begin{gathered}
\frac{dx_1}{dt} = F_0(r) - F_0\big(a(t)\big) + \varepsilon h_1(r,\varphi), \qquad \frac{dx_2}{dt} = \varepsilon h_2(r,\varphi),\\
x_1|_{t=0} = 0, \qquad x_2|_{t=0} = 0, \qquad F_0(r) \equiv \frac{r}{2} - \frac{r^3}{8},\\
h_1(r,\varphi) \equiv -r\sin\varphi\cos\varphi(1 - r^2\cos^2\varphi)\times\\
\times\left[\frac{1}{2}\cos^2\varphi + \frac{r^2}{8}(2 - \cos^2\varphi - 2\cos^4\varphi)\right],\\
h_2(r,\varphi) \equiv \sin^2\varphi\cos^2\varphi(1 - r^2\cos^2\varphi)\left(1 - \frac{r^2}{2}\cos^2\varphi\right).
\end{gathered}
\tag{15.9}
$$

Здесь r, φ — функции x, t, ε, задаваемые формулами (15.8).

15.3. Задача (15.9) — почти регулярная задача Коши

Доказательство. Введем обозначения

$$
c \equiv \cos\varphi, \qquad s \equiv \sin\varphi. \tag{15.10}
$$

Рассмотрим равенство $\varphi = \alpha + x_2 + \varepsilon g_2$, следующее из (15.8). Проделаем в (15.10) тригонометрические преобразования. Добавим первое равенство (15.8). Получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
r &= a(t) + x_1 + \varepsilon g_1,\\
c &= f_1\cos(x_2 + \varepsilon g_2) - f_2\sin(x_2 + \varepsilon g_2),\\
s &= f_2\cos(x_2 + \varepsilon g_2) + f_1\sin(x_2 + \varepsilon g_2).
\end{aligned}
\tag{15.11}
$$

Здесь $f_1 \equiv \cos\alpha$, $f_2 \equiv \sin\alpha$. Рассмотрим g_1, g_2 как функции $g_1 = \widetilde{g}_1(r,c,s)$, $g_2 = \widetilde{g}_2(r,c,s)$, задаваемые формулами (15.8). Тогда уравнения (15.11) определяют r, c, s как неявные функции от x, t, ε, f_1, f_2 в окрестности множества

$$
x = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad \varepsilon = 0, \qquad |f_1| \leqslant 1, \qquad |f_2| \leqslant 1.
$$

Правые части уравнений (15.9) зависят от $a(t)$, r, c, s. Поэтому они являются сложными функциями от x, t, ε, f_1, f_2. Отсюда и из определения 1.1 следует, что (15.9) — почти регулярная задача Коши (1.1) с функцией

$$
f(t,\varepsilon) \equiv \left(\cos\left(\varphi^\circ - \frac{t}{\varepsilon}\right), \sin\left(\varphi^\circ - \frac{t}{\varepsilon}\right)\right). \qquad \square \tag{15.12}
$$

15.4. Замечание о поиске новых переменных

Очевидно, что если есть переменные, в которых задача Коши является почти регулярной, то они не единственны. Покажем, как были найдены переменные x_1, x_2 в (15.8).

За исходные были взяты уравнения, стандартные для применения метода осреднения [15]. В них была сделана замена независимой переменной τ на t:

$$\begin{aligned}&\frac{dr}{dt}=r\sin^2\varphi\left(1-r^2\cos^2\varphi\right), && \frac{d\varphi}{dt}=-\frac{1}{\varepsilon}+\sin\varphi\cos\varphi\left(1-r^2\cos^2\varphi\right),\\ &r|_{t=0}=r^\circ, && \varphi|_{t=0}=\varphi^\circ.\end{aligned} \tag{15.13}$$

Здесь r, φ — переменные (15.6). Уравнения (15.13) следуют из (15.1), (15.4), (15.6). Функции a, α являются решением задачи Коши для осреднённых уравнений

$$\frac{da}{dt}=\frac{a}{2}-\frac{a^3}{8},\qquad \frac{d\alpha}{dt}=-\frac{1}{\varepsilon},\qquad a|_{t=0}=r^\circ,\qquad \alpha|_{t=0}=\varphi^\circ. \tag{15.14}$$

Рассмотрим разность

$$x_3\equiv r-a,\qquad x_4\equiv\varphi-\alpha.$$

Из (15.13), (15.14) следует, что x_3, x_4 являются решением следующей задачи:

$$\begin{gathered}\frac{dx_3}{dt}=F_0(r)-F_0(a(t))-\frac{r}{2}\cos 2\varphi+\frac{r^3}{8}\cos 4\varphi,\\ \frac{dx_4}{dt}=\sin\varphi\cos\varphi(1-r^2\cos^2\varphi),\qquad x_3|_{t=0}=0,\qquad x_4|_{t=0}=0,\\ r=a(t)+x_3,\qquad \varphi=\alpha(t,\varepsilon)+x_4,\end{gathered} \tag{15.15}$$

где F_0, $a(t)$, $\alpha(t,\varepsilon)$ — функции (15.8), (15.9). Написанные уравнения имеют члены порядка единицы в правых частях. Сингулярный член $1/\varepsilon$ находится по знаками косинусов и синусов — ограниченных функций. Рассмотрим первое уравнение (15.15). Из него следуют равенства

$$\begin{aligned}x_3&=\int\limits^t\left[F_0(r)-F_0(a(t))-\frac{r}{2}\cos 2\varphi+\frac{r^3}{8}\cos 4\varphi\right]dt=\\ &=\int\limits_0^t\left[F_0(r)-F_0(a(t))\right]dt-\frac{r\sin 2\varphi}{4d\varphi/dt}+\frac{r^3\sin 4\varphi}{32d\varphi/dt}+\\ &\qquad+\int\limits_0^t\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{r}{4d\varphi/dt}\right)\sin 2\varphi-\frac{d}{dt}\left(\frac{r^3}{32d\varphi/dt}\right)\sin 4\varphi\right]dt.\end{aligned}$$

Последний интеграл имеет порядок ε, так как $d\varphi/dt\ \sim\ 1/\varepsilon$. Первый интеграл имеет тот же порядок, что и переменная $x_3=r-a$. Заменяя в членах, стоящих вне интеграла, $d\varphi/dt$ на $(-1/\varepsilon)$ и обозначая

$$\bar{x}_1=x_3-\varepsilon\left(\frac{r}{4}\sin 2\varphi-\frac{r^3}{32}\sin 4\varphi\right),$$

найдем, что производная $d\bar{x}_1/dt$ равна сумме слагаемых, пропорциональных ε и/или $\bar{x}_1$, что и требовалось. Переход от $\bar{x}_1$ к x_1 вызван требованием нулевого начального значения переменных в определении 1.1.

Подчеркнем, что новая переменная найдена с помощью интегрирования по частям правой части дифференциального уравнения. При этом использовалась высокая частота гармонических сомножителей под знаком интеграла. Аналогично найдена переменная x_4.

15.5. Результаты

На отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant T$ задача Ван дер Поля (15.1) эквивалентна регулярно возмущенной задаче Коши (15.3). На отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant T/\varepsilon$ задача (15.1) эквивалентна почти регулярной задаче Коши (15.9) с функцией $f(t, \varepsilon)$ из (15.12). Новые переменные x, t связаны с исходными переменными w, $dw/d\tau$, τ формулами (15.6)–(15.8).

§ 16. Построение решения

16.1. Решение задачи с двумя малыми параметрами

Построим решение задачи (15.9) методом, указанным в § 1. Для этого перейдем от (15.9) к задаче с двумя малыми параметрами ε, μ:

$$\begin{aligned} &\frac{dz_1}{dt} = F_0(\rho) - F_0\Big(a(t)\Big) + \varepsilon h_1(\rho, \psi), && \frac{dz_2}{dt} = \varepsilon h_2(\rho, \psi), \\ &z_1|_{t=0} = 0, && z_2|_{t=0} = 0, \\ &\rho = a(t) + z_1 + \varepsilon g_1(\rho, \psi), && \psi = \alpha(t, \mu) + z_2 + \varepsilon g_2(\rho, \psi), \end{aligned} \tag{16.1}$$

где функции F_0, a, α, g_i, h_i задаются формулами (15.8), (15.9). Решение уравнений (16.1) строится в виде рядов

$$\begin{gathered} z(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t, \mu)\varepsilon^k, \\ \rho(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{(k)}(t, \mu)\varepsilon^k, \qquad \psi(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi^{(k)}(t, \mu)\varepsilon^k. \end{gathered} \tag{16.2}$$

Подставим (16.2) в (16.1), разложим левые и правые части уравнений по степеням ε, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим уравнения для $z^{(k)}(t, \mu)$, $\rho^{(k)}(t, \mu)$, $\psi^{(k)}(t, \mu)$:

$$\begin{aligned} &\frac{dz_1^{(0)}}{dt} = F_0\Big(a(t) + z_1^{(0)}\Big) - F_0\big(a(t)\big), && \frac{dz_2^{(0)}}{dt} = 0, \\ &z_1^{(0)}(0, \mu) = 0, && z_2^{(0)}(0, \mu) = 0, \\ &\rho^{(0)} = a(t) + z_1^{(0)}, && \psi^{(0)} = \alpha(t, \mu) + z_2^{(0)}, \end{aligned} \tag{16.3}$$

$$\frac{dz^{(k)}}{dt} = A(t)z^{(k)} + F^{(k)}(t,\mu), \qquad z^{(k)}(0,\mu) = 0,$$

$$z^{(k)} = \left(z_1^{(k)}, z_2^{(k)}\right), \qquad F^{(k)} = \left(F_1^{(k)}, F_2^{(k)}\right),$$

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{dF_0\left(a(t)\right)}{dr} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} - \dfrac{3a^2(t)}{8} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_1^{(k)} - \left[F_0\left(\sum_{j=0}^{k-1} \rho^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j\right) + \right.$$

$$+ \varepsilon \frac{dF_0}{dr}\left(a(t)\right) \cdot g_1\left(\sum_{j=0}^{k-1} \rho^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j, \sum_{j=0}^{k-1} \psi^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j\right) +$$

$$\left. + \varepsilon h_1\left(\sum_{j=0}^{k-1} \rho^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j, \sum_{j=0}^{k-1} \psi^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j\right)\right]^{(k)},$$

$$F_2^{(k)} = \left[h_2\left(\sum_{j=0}^{k-1} \rho^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j, \sum_{j=0}^{k-1} \psi^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j\right)\right]^{(k-1)},$$

$$\rho^{(k)}(t,\mu) = z_1^{(k)}(t,\mu) + \left[g_1\left(\sum_{j=0}^{k-1} \rho^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j, \sum_{j=0}^{k-1} \psi^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j\right)\right]^{(k-1)},$$

$$\psi^{(k)}(t,\mu) = z_2^{(k)}(t,\mu) + \left[g_2\left(\sum_{j=0}^{k-1} \rho^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j, \sum_{j=0}^{k-1} \psi^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j\right)\right]^{(k-1)}, \quad k \geqslant 1.$$

Функции g_1, g_2 вычисляются по формулам (15.8). Решение уравнений (16.3) имеет вид

$$z^{(0)} = 0, \qquad \rho^{(0)}(t,\mu) = a(t), \qquad \psi^{(0)}(t,\mu) = \alpha(t,\mu),$$

$$z_1^{(k)}(t,\mu) = \int_0^t q(t,s)\left[F_0\left(\sum_{j=0}^{k-1} \rho^{(j)}(s,\mu)\varepsilon^j\right) + \right.$$

$$+ \varepsilon \frac{dF_0}{dr}\left(a(s)\right) \cdot g_1\left(\sum_{j=0}^{k-1} \rho^{(j)}(s,\mu)\varepsilon^j, \sum_{j=0}^{k-1} \psi^{(j)}(s,\mu)\varepsilon^j\right) + \qquad (16.4)$$

$$\left. + \varepsilon h_1\left(\sum_{j=0}^{k-1} \rho^{(j)}(s,\mu)\varepsilon^j, \sum_{j=0}^{k-1} \psi^{(j)}(s,\mu)\varepsilon^j\right)\right]^{(k)} ds,$$

$$z_2^{(k)}(t,\mu) = \int\limits_0^t \left[h_2\left(\sum_{j=0}^{k-1} \rho^{(j)}(s,\mu)\varepsilon^j, \sum_{j=0}^{k-1} \psi^{(j)}(s,\mu)\varepsilon^j\right)\right]^{(k-1)} ds, \quad k \geqslant 1.$$

Здесь a, α, F_0, h_1, h_2 вычисляются по формулам (15.8), (15.9); $\rho^{(j)}$, $\psi^{(j)}$ при $j \geqslant 1$ — по формулам (16.3),

$$U(t,s) = \begin{pmatrix} q(t,s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матрица Коши уравнений в вариациях

$$\frac{d\zeta}{dt} = A(t)\zeta, \qquad q(t,s) \equiv e^{s-t}\left(\frac{1+C_0e^{-s}}{1+C_0e^{-t}}\right)^{3/2}. \tag{16.5}$$

Здесь C_0 — постоянная (15.8). Функции $z^{(k)}$, $\rho^{(k)}$, $\psi^{(k)}$ вычисляются последовательно для $k = 0, 1, \ldots$.

При $k = 1$ из (16.3), (16.4) следуют формулы

$$\begin{aligned} z_1^{(1)}(t,\mu) &= \int\limits_0^t q(t,s)\left[\frac{dF_0}{dr}(a(s)) \cdot g_1(a(s), \alpha(s,\mu)) + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + h_1(a(s), \alpha(s,\mu))\right] ds, \\ z_2^{(1)}(t,\mu) &= \int\limits_0^t h_2(a(s), \alpha(s,\mu))\, ds, \\ \rho^{(1)}(t,\mu) &= z_1^{(1)}(t,\mu) + g_1(a(t), \alpha(t,\mu)), \\ \psi^{(1)}(t,\mu) &= z_2^{(1)}(t,\mu) + g_2(a(t), \alpha(t,\mu)). \end{aligned} \tag{16.6}$$

Из (16.4), (16.6) получим формулы для асимптотического решения задачи (16.1) нулевого и первого порядков:

$$\begin{aligned} Z_0 &\equiv z^{(0)}(t,\mu) = 0, \quad \mathcal{R}_0(t) \equiv \rho^{(0)}(t) = a(t), \\ \Psi_0(t,\mu) &\equiv \psi^{(0)}(t,\mu) = \alpha(t,\mu), \\ Z_1(t,\varepsilon,\mu) &\equiv z^{(0)}(t,\mu) + \varepsilon z^{(1)}(t,\mu), \quad Z_1 = (Z_{11}, Z_{12}), \\ Z_{11}(t,\varepsilon,\mu) &= \varepsilon \int\limits_0^t q(t,s)\left[\frac{dF_0}{dr}(a(s)) \cdot g_1(a(s), \alpha(s,\mu)) + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + h_1(a(s), \alpha(s,\mu))\right] ds, \end{aligned} \tag{16.7}$$

$$Z_{12}(t,\varepsilon,\mu) = \varepsilon \int\limits_0^t h_2\big(a(s), \alpha(s,\mu)\big)\, ds,$$

$$\mathcal{R}_1(t,\varepsilon,\mu) \equiv \rho^{(0)}(t,\mu) + \varepsilon\rho^{(1)}(t,\mu) = a(t) + Z_{11}(t,\varepsilon,\mu) + \varepsilon g_1\Big(a(t), \alpha(t,\mu)\Big),$$

$$\Psi_1(t,\varepsilon,\mu) \equiv \psi^{(0)}(t) + \varepsilon\psi^{(1)}(t,\mu) = \alpha(t,\mu) + Z_{12}(t,\varepsilon,\mu) + \varepsilon g_2\Big(a(t), \alpha(t,\mu)\Big).$$

16.2. Решение задачи (15.9)

Из (15.8), (15.9), (16.1) следует, что решение почти регулярной задачи Коши (15.9) и функции r, φ равны соответственно функциям z, ρ, ψ при $\mu = \varepsilon$:

$$x(t,\varepsilon) = z(t,\varepsilon,\varepsilon), \qquad r(t,\varepsilon) = \rho(t,\varepsilon,\varepsilon), \qquad \varphi(t,\varepsilon) = \psi(t,\varepsilon,\varepsilon). \quad (16.8)$$

Отсюда и из (16.2) следуют формулы:

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t,\varepsilon)\varepsilon^k,$$
$$r(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{(k)}(t,\varepsilon)\varepsilon^k, \qquad \varphi(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi^{(k)}(t,\varepsilon)\varepsilon^k, \quad (16.9)$$

где коэффициенты $z^{(k)}(t,\varepsilon)$, $\rho^{(0)}(t,\varepsilon)$, $\psi^{(0)}(t,\epsilon)$ вычисляются по формулам (16.4); $\rho^{(k)}(t,\varepsilon)$, $\psi^{(k)}(t,\varepsilon)$ при $k \geqslant 1$ — по формулам (16.3).

Асимптотические приближения X_n, R_n, Φ_n функций x, r, φ равны частичным суммам рядов (16.9). Поэтому

$$X_n(t,\varepsilon) = Z_n(t,\varepsilon,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} z^{(k)}(t,\varepsilon)\varepsilon^k,$$

$$R_n(t,\varepsilon) = \mathcal{R}_n(t,\varepsilon,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \rho^{(k)}(t,\varepsilon)\varepsilon^k,$$

$$\Phi_n(t,\varepsilon) = \Psi_n(t,\varepsilon,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \psi^{(k)}(t,\varepsilon)\varepsilon^k.$$

Здесь Z_n, $\mathcal{R}_n$, Ψ_n — частичные суммы рядов (16.2). Отсюда и из (16.7) получим асимптотические приближения функций x, r, φ нулевого и первого порядков:

$$X_0 = 0, \quad R_0(t) = a(t), \quad \Phi_0(t,\varepsilon) = \alpha(t,\varepsilon), \quad X_1 = (X_{11}, X_{12}),$$

$$X_{11}(t,\varepsilon) = \varepsilon \int\limits_0^t q(t,s)\left[\frac{dF_0}{dr}\big(a(s)\big) \cdot g_1\big(a(s), \alpha(s,\varepsilon)\big) + \right. \quad (16.10)$$
$$\left. + h_1\big(a(s), \alpha(s,\varepsilon)\big)\right] ds,$$

$$X_{12}(t,\varepsilon) = \varepsilon \int\limits_0^t h_2\bigl(a(s), \alpha(s,\varepsilon)\bigr)\, ds,$$

$$R_1(t,\varepsilon) = a(t) + X_{11}(t,\varepsilon) + \varepsilon g_1\bigl(a(t), \alpha(t,\varepsilon)\bigr),$$

$$\Phi_1(t,\varepsilon) = \alpha(t,\varepsilon) + X_{12}(t,\varepsilon) + \varepsilon g_2\bigl(a(t), \alpha(t,\varepsilon)\bigr).$$

Здесь a, α, g_i, h_i, q — функции (15.8), (15.9), (16.5).

16.3. Решение задачи (15.1)

Из (15.7), (16.9) получим формулу для решения задачи (15.1):

$$w = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \rho^{(k)}(t,\varepsilon)\varepsilon^k\right) \cdot \cos\left(\sum_{k=0}^{\infty} \psi^{(k)}(t,\varepsilon)\varepsilon^k\right). \tag{16.11}$$

n-е приближение функции w имеет вид

$$W_n \equiv R_n \cos\Phi_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \rho^{(k)}(t,\varepsilon)\varepsilon^k\right) \cdot \cos\left(\sum_{k=0}^{n} \psi^{(k)}(t,\varepsilon)\varepsilon^k\right). \tag{16.12}$$

В (16.11), (16.12) коэффициенты $\rho^{(0)}$, $\psi^{(0)}$ вычисляются по формулам (16.4); $\rho^{(k)}$, $\psi^{(k)}$ при $k \geqslant 1$ — по формулам (16.3), $t = \tau\varepsilon$. Подставляя (16.10) в (16.12), получим нулевое и первое приближения функции w:

$$W_0(t,\varepsilon) = a(t)\cos\alpha(t,\varepsilon),$$

$$W_1(t,\varepsilon) = R_1\cos\Phi_1 = \bigl[a(t) + X_{11}(t,\varepsilon) + \varepsilon g_1\bigl(a(t), \alpha(t,\varepsilon)\bigr)\bigr] \times \tag{16.13}$$

$$\times \cos\bigl[\alpha(t,\varepsilon) + X_{12}(t,\varepsilon) + \varepsilon g_2\bigl(a(t), \alpha(t,\varepsilon)\bigr)\bigr].$$

Здесь a, α, g_i, X_{11}, X_{12} — функции (15.8), (16.10), $t = \tau\varepsilon$.

16.4. Результаты

Решение задачи Ван дер Поля (15.1) представимо в виде (16.11) через формальные ряды. Асимптотическое решение n-го порядка задачи (15.1) представимо в виде (16.12). Асимптотические решения нулевого и первого порядков задачи (15.1) имеют вид (16.13).

О сходимости рядов в (16.11) и об оценке точности асимптотического решения смотрите в § 17 и § 18.

§ 17. Применение теорем о почти регулярной задаче Коши

17.1. Проверка условий 2.1–2.4 для задачи (15.9)

Запишем уравнения (15.11) в следующем виде:

$$\begin{gathered} H_1(r,c,s,x,\varepsilon,a)\equiv r-a-x_1-\varepsilon\left(\frac{rcs}{2}-\frac{r^3cs}{8}(2c^2-1)+C_1\right)=0,\\ H_2(r,c,x,\varepsilon,f_1,f_2)\equiv c-f_1\cos H+f_2\sin H=0,\\ H_3(r,c,s,x,\varepsilon,f_1,f_2)\equiv s-f_2\cos H-f_1\sin H=0,\\ H=H(r,c,x,\varepsilon)\equiv x_2+\frac{\varepsilon c^2}{2}-\frac{\varepsilon r^2c^4}{4}+\varepsilon C_2. \end{gathered} \tag{17.1}$$

Здесь использованы формулы (15.8) для g_1, g_2; $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ заменены соответственно на c, s.

Рассмотрим (17.1) как уравнения относительно r, c, s. Якобиан функций H_1, H_2, H_3 по переменным r, c, s равен

$$I_H\equiv\frac{\partial(H_1H_2H_3)}{\partial(rcs)}=1+\varepsilon\Delta I_H(r,c,s,x,\varepsilon,f_1,f_2), \tag{17.2}$$

ΔI_H — многочлен от r, c, s, ε, f_1, f_2, $\cos H$, $\sin H$.

H_1, H_2, H_3 — аналитические функции своих переменных в пространстве

$$(r,c,s,x,\varepsilon,a,f_1,f_2)\in\mathbf{C}^5\times\mathbf{R}^3.$$

При любых значениях $(a_*, f_{1*}, f_{2*})\in\mathbf{R}^3$ точка

$$(r,c,s,x,\varepsilon,a,f_1,f_2)=(a_*,f_{1*},f_{2*},0,0,a_*,f_{1*},f_{2*}) \tag{17.3}$$

удовлетворяет уравнениям (17.1) и якобиан I_H в этой точке равен 1. Отсюда по теореме о неявной функции следует, что уравнения (17.1) задают неявные аналитические функции

$$r=r(x,\varepsilon,a,f_1,f_2),\quad c=c(x,\varepsilon,a,f_1,f_2),\quad s=s(x,\varepsilon,a,f_1,f_2), \tag{17.4}$$

отображающие окрестность точки

$$(x,\varepsilon,a,f_1,f_2)=(0,0,a_*,f_{1*},f_{2*})\in\mathbf{C}^2\times\mathbf{R}^3$$

на окрестность точки

$$(r,c,s)=(a_*,f_{1*},f_{2*})\in\mathbf{C}^3.$$

В точке (17.3) правые части дифференциальных уравнений (15.9) обращаются в ноль. Так как функция $a(t)$ определена на всей оси $t\geqslant 0$, то отсюда следует, что условие 2.1 выполняется при любых значениях $t\geqslant 0$, f_1, f_2, то есть в условии 2.1 можно положить

$$D_t=\{t\colon t\geqslant 0\}\subset\mathbf{R},\qquad D_f=\{f\colon |f_1|\leqslant 1, |f_2|\leqslant 1\}\subset\mathbf{R}^2. \tag{17.5}$$

Функция $a(t)$ задается формулой (15.8) и является аналитической функцией на оси $t \geqslant 0$ со значениями из множества

$$C_3 \equiv \min(2, r^\circ) \leqslant a \leqslant C_4 \equiv \max(2, r^\circ) \qquad \text{при} \quad r^\circ > 0. \tag{17.6}$$

Из аналитичности функций (17.4) следует, что при некоторых значениях $\delta > 0$, $\bar{\varepsilon} > 0$ (17.4) — аналитические ограниченные функции на множестве

$$\|x\| \leqslant \delta, \qquad |\varepsilon| \leqslant \bar{\varepsilon}, \qquad C_3 \leqslant a \leqslant C_4, \qquad f \in D_f. \tag{17.7}$$

По теореме о сложной функции после подстановки $a = a(t)$ функции (17.4) становятся аналитическими ограниченными функциями на множестве

$$x \in \mathbf{C}^2, \quad \|x\| \leqslant \delta, \quad t \in D_t, \quad \varepsilon \in \mathbf{C}, \quad |\varepsilon| \leqslant \bar{\varepsilon}, \quad f \in D_f. \tag{17.8}$$

Правые части дифференциальных уравнений (15.9) — многочлены от r, c, s, ε, a. По теореме о сложной функции после подстановки (17.4) и подстановки $a = a(t)$ правые части дифференциальных уравнений (15.9) становятся аналитическими ограниченными функциями на множестве (17.8). Получили, что условие 2.2 для задачи (15.9) выполняется при D_t, D_f, заданных формулами (17.5).

Выполнение условия 2.3 для задачи (15.9) следует из условия 2.2. При этом $n \geqslant 0$ — произвольное число, множества D_t, D_f задаются формулами (17.5). Ограниченность производных следует из ограниченности множества (17.7).

Выполнение условия 2.4 на множестве D_t из (17.5) следует из формулы (15.12) для f.

17.2. Применение теорем 2.1–2.8 к задаче (15.9)

Из (16.5) следуют соотношения для нормы матрицы Коши:

$$\|U(t,s)\| = \max(1, |q(t,s)|) = \max\left[1, e^{s-t}\left(\frac{1 + C_0 e^{-s}}{1 + C_0 e^{-t}}\right)^{3/2}\right], \tag{17.9}$$
$$\|U(t,s)\| \leqslant C \quad \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant t.$$

Поэтому условия теорем 2.3, 2.7 выполняются при $\kappa = 0$, $C^\circ = 0$. Из теорем 2.3, 2.7 следует, что для любых значений $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < 1/2$, $n \geqslant 0$ найдутся постоянные $\varepsilon_* > 0$, C_*, C_*°, не зависящие от t, ε и такие, что при

$$0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-\chi}, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*:$$

1) решение задачи (15.9) существует и единственно, 2) ряд (16.9) для $x(t,\varepsilon)$ сходится равномерно к решению задачи (15.9), 3) справедливо неравенство

$$\|x(t,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^{n+1} t (C_*^\circ t^{2n} + C_*).$$

Теоремы 2.1, 2.4 слабее теоремы 2.3, теоремы 2.5, 2.8 слабее теоремы 2.7. Поэтому их не рассматриваем.

Условия теорем 2.2, 2.6 не выполняются, так как не выполняется неравенство (2.3). Это следует из формулы (17.9): при $t \to \infty$ $\|U(t,s)\| \to 1$, тогда как в неравенстве (2.3) функция $e^{-\kappa(t-s)} \to 0$.

17.3. Применение теоремы 2.10 к задаче (15.9)

Оценим остаточный член первого порядка, используя алгоритм доказательства теоремы 2.10 из § 6. Отметим, что использование алгоритма доказательства теоремы 2.10 вместо утверждения теоремы не может ухудшить конечный результат. Улучшение же результата возможно, так как оценки могут оказаться точнее из-за конкретности системы, как в настоящем примере.

Уравнения для остаточного члена первого порядка. Обозначим через u остаточный член первого порядка:

$$u \equiv x - X_1(t,\varepsilon), \qquad u = (u_1, u_2). \tag{17.10}$$

Из (15.9), (16.10) следует, что u — решение следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned}
&\frac{du_1}{dt} = \frac{dF_0}{dr}\big(a(t)\big)u_1 + G_1(u,t,\varepsilon),\\
&\frac{du_2}{dt} = G_2(u,t,\varepsilon), \qquad u|_{t=0} = 0,\\
G_1(u,t,\varepsilon) &\equiv F_0(r) - F_0\big(a(t)\big) - \frac{dF_0}{dr}(a(t))\cdot\big[X_{11}(t,\varepsilon) + \\
&\quad + u_1 + \varepsilon g_1\big(a(t),\alpha(t,\varepsilon)\big)\big] + \\
&\quad + \varepsilon\big[h_1(r,\varphi) - h_1\big(a(t),\alpha(t,\varepsilon)\big)\big],\\
G_2(u,t,\varepsilon) &\equiv \varepsilon\big[h_2(r,\varphi) - h_2\big(a(t),\alpha(t,\varepsilon)\big)\big],\\
&r = a(t) + X_{11}(t,\varepsilon) + u_1 + \varepsilon g_1(r,\varphi),\\
&\varphi = \alpha(t,\varepsilon) + X_{12}(t,\varepsilon) + u_2 + \varepsilon g_2(r,\varphi).
\end{aligned} \tag{17.11}$$

Задача (17.11) эквивалентна интегральным уравнениям

$$\begin{aligned}
u_1(t,\varepsilon) &= \int\limits_0^t q(t,s)\cdot G_1\big(u(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big)\,ds,\\
u_2(t,\varepsilon) &= \int\limits_0^t G_2\big(u(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big)\,ds,
\end{aligned} \tag{17.12}$$

где $q(t,s)$ — функция (16.5).

Оценка функции $G = (G_1, G_2)$. Используя равенства

$$F(x) - F(z) = \int\limits_0^1 \frac{dF}{dx}(x_1)d\theta \cdot (x - z), \qquad x_1 = \theta x + (1-\theta)z,$$

получим следующие формулы для функции G:

$$\begin{aligned}
&\Delta G(u, \widetilde{u}, t, \varepsilon) \equiv G(u, t, \varepsilon) - G(\widetilde{u}, t, \varepsilon), && \Delta G = (\Delta G_1, \Delta G_2),\\
&G_1(0, t, \varepsilon) = I_1 + I_2 + I_3, && G_2(0, t, \varepsilon) = I_4,\\
&\Delta G_1(u, \widetilde{u}, t, \varepsilon) = I_5 + I_6 + I_7, && \Delta G_2(u, \widetilde{u}, t, \varepsilon) = I_8,
\end{aligned} \tag{17.12}$$

$$I_1 \equiv \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{d^2F_0}{dr^2}(r_1)\theta\Big[X_{11}(t,\varepsilon) + \varepsilon\theta_1 g_1(r_2, \varphi_2) + \\
+ \varepsilon(1-\theta_1)\cdot g_1\Big(a(t), \alpha(t,\varepsilon)\Big)\Big]\, d\theta\, d\theta_1 \cdot r_7,$$

$$I_2 \equiv \varepsilon \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{dF_0}{dr}(r_1)\, d\theta\, d\theta_1 \cdot \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial g_1}{\partial r}(r_3, \varphi_3) r_7 + \frac{\partial g_1}{\partial \varphi}(r_3, \varphi_3)\varphi_7\right] d\theta,$$

$$I_3 \equiv \varepsilon \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial h_1}{\partial r}(r_3, \varphi_3) r_7 + \frac{\partial h_1}{\partial \varphi}(r_3, \varphi_3)\varphi_7\right] d\theta,$$

$$I_4 \equiv \varepsilon \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial h_2}{\partial r}(r_3, \varphi_3) r_7 + \frac{\partial h_2}{\partial \varphi}(r_3, \varphi_3)\varphi_7\right] d\theta,$$

$$I_5 \equiv \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{d^2F_0}{dr^2}(r_4)\Big[X_{11}(t,\varepsilon) + \theta u_1 + (1-\theta)\widetilde{u}_1 + \\
+ \varepsilon\theta g_1(r, \varphi) + \varepsilon(1-\theta) g_1(r_6, \varphi_6)\Big] d\theta d\theta_1 \cdot (u_1 - \widetilde{u}_1),$$

$$I_6 \equiv \varepsilon \int\limits_0^1 \frac{dF_0}{dr}(r_5) d\theta \cdot \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial g_1}{\partial r}(r_5, \varphi_5) r_8 + \frac{\partial g_1}{\partial \varphi}(r_5, \varphi_5)\varphi_8\right] d\theta,$$

$$I_7 \equiv \varepsilon \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial h_1}{\partial r}(r_5, \varphi_5) r_8 + \frac{\partial h_1}{\partial \varphi}(r_5, \varphi_5)\varphi_8\right] d\theta,$$

$$I_8 \equiv \varepsilon \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial h_2}{\partial r}(r_5, \varphi_5) r_8 + \frac{\partial h_2}{\partial \varphi}(r_5, \varphi_5)\varphi_8\right] d\theta,$$

$$
\begin{aligned}
&r_1 \equiv a(t) + \theta\theta_1 X_{11}(t,\varepsilon) + \varepsilon\theta\theta_1 g_1(r_2,\varphi_2),\\
&r_3 \equiv a(t) + \theta X_{11}(t,\varepsilon) + \varepsilon\theta g_1(r_2,\varphi_2),\\
&\varphi_3 \equiv \alpha(t,\varepsilon) + \theta X_{12}(t,\varepsilon) + \varepsilon\theta g_2(r_2,\varphi_2),\\
&r_4 \equiv a(t) + \theta_1 X_{11}(t,\varepsilon) + \theta\theta_1 u_1 + (1-\theta)\theta_1\widetilde{u}_1 +\\
&\qquad\qquad + \varepsilon\theta\theta_1 g_1(r,\varphi) + \varepsilon(1-\theta)\theta_1 g_1(r_6,\varphi_6),\\
&r_5 \equiv a(t) + X_{11}(t,\varepsilon) + \theta u_1 + (1-\theta)\widetilde{u}_1 + \varepsilon\theta g_1(r,\varphi) + \varepsilon(1-\theta)g_1(r_6,\varphi_6),\\
&\varphi_5 \equiv \alpha(t,\varepsilon) + X_{12}(t,\varepsilon) + \theta u_2 + (1-\theta)\widetilde{u}_2 + \varepsilon\theta g_2(r,\varphi) + \varepsilon(1-\theta)g_2(r_6,\varphi_6),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&r_7 \equiv X_{11}(t,\varepsilon) + \varepsilon g_1(r_2,\varphi_2), &&\varphi_7 \equiv X_{12}(t,\varepsilon) + \varepsilon g_2(r_2,\varphi_2),\\
&r_8 \equiv u_1 - \widetilde{u}_1 + \varepsilon g_1(r,\varphi) - \varepsilon g_1(r_6,\varphi_6), &&\varphi_8 \equiv u_2 - \widetilde{u}_2 + \varepsilon g_2(r,\varphi) - \varepsilon g_2(r_6,\varphi_6),
\end{aligned}
$$

r_2, φ_2 — решение уравнений

$$
\begin{aligned}
r_2 &= a(t) + X_{11}(t,\varepsilon) + \varepsilon g_1(r_2,\varphi_2),\\
\varphi_2 &= \alpha(t,\varepsilon) + X_{12}(t,\varepsilon) + \varepsilon g_2(r_2,\varphi_2),
\end{aligned}
\tag{17.14}
$$

r_6, φ_6 — решение уравнений

$$
\begin{aligned}
r_6 &= a(t) + X_{11}(t,\varepsilon) + \widetilde{u}_1 + \varepsilon g_1(r_6,\varphi_6),\\
\varphi_6 &= \alpha(t,\varepsilon) + X_{12}(t,\varepsilon) + \widetilde{u}_2 + \varepsilon g_2(r_6,\varphi_6).
\end{aligned}
\tag{17.15}
$$

Оценим функции. Из (15.8) следует, что при $t \geqslant 0$ $a(t)$ — монотонная функция, пределы которой указаны в (17.6). Из (15.8), (15.9) следует, что $g_j(r,\varphi)$, $h_j(r,\varphi)$, $j = 1, 2$, — многочлены от переменных r, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$. Поэтому справедливы неравенства

$$
\begin{gathered}
\bigl|g_j\bigl(a(t),\alpha(t,\varepsilon)\bigr)\bigr| \leqslant C, \quad \bigl|h_j\bigl(a(t),\alpha(t,\varepsilon)\bigr)\bigr| \leqslant C,\\
j = 1, 2, \quad t \geqslant 0, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.
\end{gathered}
\tag{17.16}
$$

Из (16.5), (16.10), (17.6), (17.16) получим оценки функций X_{1j}:

$$
\begin{aligned}
|X_{11}| &\leqslant C\varepsilon \int_0^t |q(t,s)|\,ds = C\varepsilon \int_0^t e^{s-t}\left(\frac{1+C_0e^{-s}}{1+C_0e^{-t}}\right)^{3/2} ds \leqslant\\
&\leqslant C\varepsilon \int_0^t e^{s-t}\,ds = C\varepsilon(1-e^{-t}) \leqslant C\varepsilon,
\end{aligned}
\tag{17.17}
$$

$$
|X_{12}| \leqslant \varepsilon \int_0^t C\,ds \leqslant Ct\varepsilon, \quad t \geqslant 0, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.
$$

Рассмотрим уравнения (15.11) в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
r - r_* - \varepsilon\widetilde{g}_1(r, c, s) = 0, \\
c - f_1 \cos\left[\varphi_* + \varepsilon\widetilde{g}_2(r, c, s)\right] + f_2 \sin\left[\varphi_* + \varepsilon\widetilde{g}_2(r, c, s)\right] = 0, \\
s - f_2 \cos\left[\varphi_* + \varepsilon\widetilde{g}_2(r, c, s)\right] - f_1 \sin\left[\varphi_* + \varepsilon\widetilde{g}_2(r, c, s)\right] = 0.
\end{gathered}
\tag{17.18}
$$

Здесь $\widetilde{g}_1$, $\widetilde{g}_2$ — функции g_1, g_2 из (15.8), рассматриваемые относительно переменных r, $c = \cos\varphi$, $s = \sin\varphi$: $g_i(r, \varphi) = \widetilde{g}_i(r, \cos\varphi, \sin\varphi)$, i=1,2.

При любых значениях r_*, f_1, f_2 уравнениям (17.18) удовлетворяет точка

$$
(r, c, s, r_*, \varphi_*, \varepsilon, f_1, f_2) = (r_*, f_1, f_2, r_*, 0, 0, f_1, f_2)
$$

и в этой точке якобиан левых частей уравнений (17.18) по r, c, s равен 1. Отсюда по теореме о неявной функции следует: для любых положительных значений r_{*1}, r_{*2}, c_1, s_1 найдутся такие значения $\varepsilon_1 > 0$, $\varphi_{*1} > 0$, что при

$$
0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \quad |\varphi_*| \leqslant \varphi_{*1} \tag{17.19}
$$

и при

$$
|r_*| \leqslant C_4 + r_{*1}, \quad |f_1| \leqslant 1, \quad |f_2| \leqslant 1 \tag{17.20}
$$

решение

$$
r = r(r_*, \varphi_*, \varepsilon, f_1, f_2), \quad c = c(r_*, \varphi_*, \varepsilon, f_1, f_2), \quad s = s(r_*, \varphi_*, \varepsilon, f_1, f_2) \tag{17.21}
$$

системы уравнений (17.18) существует, единственно, непрерывно дифференцируемо и удовлетворяет неравенствам

$$
|r - r_*| \leqslant r_{*2}, \quad |c - f_1| \leqslant c_1, \quad |s - f_2| \leqslant s_1. \tag{17.22}
$$

Здесь C_0 — постоянная (17.6). Зафиксируем r_{*1}, r_{*2}, c_1, s_1.

Из (17.11), (17.14), (17.15) следует, что (r, φ), (r_2, φ_2), (r_6, φ_6) являются решением системы уравнений (17.18) при следующих значениях (r_*, φ_*):

$$
\begin{aligned}
(r_*, \varphi_*) &= \big(a(t) + X_{11}(t, \varepsilon) + u_1, X_{12}(t, \varepsilon) + u_2\big), \\
(r_*, \varphi_*) &= \big(a(t) + X_{11}(t, \varepsilon), X_{12}(t, \varepsilon)\big), \\
(r_*, \varphi_*) &= \big(a(t) + X_{11}(t, \varepsilon) + \widetilde{u}_1, X_{12}(t, \varepsilon) + \widetilde{u}_2\big).
\end{aligned}
\tag{17.23}
$$

Рассмотрим множество

$$
\|u\| \leqslant \delta, \quad \|\widetilde{u}\| \leqslant \delta, \quad 0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-\chi}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}, \quad u \in \mathbf{R}^2, \quad \widetilde{u} \in \mathbf{R}^2. \tag{17.24}
$$

Из неравенств (17.6), (17.17) следует, что найдутся такие положительные значения δ, T, $\bar{\varepsilon}$, что при значениях (17.24) и $\chi = 1$ точки (17.23) принадлежат множеству (17.19), (17.20). Или: при любых значениях $T > 0$ χ, $0 \leqslant \chi < 1$ найдутся такие положительные значения δ, $\bar{\varepsilon}$, что при значениях (17.24) точки (17.23) принадлежат множеству (17.19), (17.20). Так как $f_1 = \cos\alpha(t, \varepsilon)$, $f_2 = \sin\alpha(t, \varepsilon)$, то это означает, что в каждом

из двух случаев функции $r(u,t,\varepsilon)$, $\varphi(u,t,\varepsilon)$, $r_2(t,\varepsilon)$, $\varphi_2(t,\varepsilon)$, $r_6(\widetilde{u},t,\varepsilon)$, $\varphi_6(\widetilde{u},t,\varepsilon)$ в равенствах (17.13) существуют, единственны, непрерывно дифференцируемы на множестве (17.24). При этом $r(u,t,\varepsilon)$, $r_2(t,\varepsilon)$, $r_6(\widetilde{u},t,\varepsilon)$ — ограниченные функции, так как принадлежат (17.22).

Функции g_1, g_2 в (15.8) являются многочленами от r, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$. Отсюда и из формул (17.13) следует, что на множестве (17.24) при $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$ определены, непрерывно дифференцируемы и ограничены функции

$$r_1 = r_1(t,\varepsilon,\theta,\theta_1), \qquad r_3 = r_3(t,\varepsilon,\theta), \quad r_4 = r_4(u,\widetilde{u},t,\varepsilon,\theta,\theta_1),$$
$$r_5 = r_5(u,\widetilde{u},t,\varepsilon,\theta), \quad r_7 = r_7(t,\varepsilon), \qquad \varphi_7 = \varphi_7(t,\varepsilon),$$
$$r_8 = r_8(u,\widetilde{u},t,\varepsilon), \quad \varphi_8 = \varphi_8(u,\widetilde{u},t,\varepsilon),$$

определены и непрерывно дифференцируемы функции

$$\varphi_3 = \varphi_3(t,\varepsilon,\theta), \qquad \varphi_5 = \varphi_5(u,\widetilde{u},t,\varepsilon,\theta).$$

При этом

$$|r_7(t,\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon, \qquad\qquad |\varphi_7(t,\varepsilon)| \leqslant \varepsilon(Ct+C),$$
$$|r_8(u,\widetilde{u},t,\varepsilon)| \leqslant |u_1-\widetilde{u}_1| + C\varepsilon, \quad |\varphi_8(u,\widetilde{u},t,\varepsilon)| \leqslant |u_2-\widetilde{u}_2| + C\varepsilon.$$

Из (15.8), (15.9) следует, что

$$\frac{dF_0}{dr}(r), \quad \frac{d^2F_0}{dr^2}(r), \quad \frac{\partial g_1}{\partial r}(r,\varphi), \quad \frac{\partial g_1}{\partial\varphi}(r,\varphi), \quad \frac{\partial h_j}{\partial r}(r,\varphi), \quad \frac{\partial h_j}{\partial\varphi}(r,\varphi),$$
$$j = 1,2$$

— многочлены от переменных r, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$. Поэтому они ограничены, когда аргумент r принадлежит ограниченному множеству. Отсюда, из (17.11), (17.13) получим, что на множестве (17.24) функция $G(u,t,\varepsilon)$ определена, непрерывно дифференцируема и удовлетворяет неравенствам

$$|G_1(0,t,\varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2(Ct+C), \qquad |G_2(0,t,\varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2(Ct+C),$$
$$|\Delta G_1(u,\widetilde{u},t,\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon^2 + C\varepsilon\|u-\widetilde{u}\| + C\,|u_1-\widetilde{u}_1|\Big(|u_1|+|\widetilde{u}_1|\Big), \tag{17.25}$$
$$|\Delta G_2(u,\widetilde{u},t,\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon^2 + C\varepsilon\|u-\widetilde{u}\|.$$

Оценка остаточного члена. Правые части дифференциальных уравнений (17.11) определены и непрерывно дифференцируемы на множестве (17.24) переменных u, t, ε. По теореме о существовании и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений для любого значения ε, $0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}$, найдется такое значение $t_1 = t_1(\varepsilon)$, $0 < t_1(\varepsilon) \leqslant T\varepsilon^{\,\chi}$, что при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ решение $u = u(t,\varepsilon)$ задачи (17.11) существует, единственно, непрерывно дифференцируемо по t и удовлетворяет неравенству $\|u(t,\varepsilon)\| \leqslant \delta$. Оценим интегралы (17.12) на множестве

$$0 \leqslant t \leqslant t_1(\varepsilon), \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}.$$

Из (16.5), (17.12), (17.25) следуют неравенства

$$
\begin{aligned}
|u_1(t,\varepsilon)| &\leqslant \int_0^t |q(t,s)|\cdot\big[|G_1(0,s,\varepsilon)| + |\Delta G_1(u(s,\varepsilon),0,s,\varepsilon)|\big]\,ds \leqslant \\
&\leqslant \int_0^t e^{s-t}\big[\varepsilon^2(Cs+C) + C\varepsilon\|u(s,\varepsilon)\| + C|u_1(s,\varepsilon)|^2\big]\,ds \leqslant \\
&\leqslant C\varepsilon^2 t + C\varepsilon(1-e^{-t})v(t,\varepsilon) + Cv_1^2(t,\varepsilon), \\
|u_2(t,\varepsilon)| &\leqslant \int_0^t \big[|G_2(0,s,\varepsilon)| + |\Delta G_2(u(s,\varepsilon),0,s,\varepsilon)|\big]\,ds \leqslant \\
&\leqslant \int_0^t \big[\varepsilon^2(Cs+C) + C\varepsilon\|u(s,\varepsilon)\|\big]\,ds \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon^2 t(Ct+C) + C\varepsilon t v(t,\varepsilon), \\
v(t,\varepsilon) &\leqslant \widetilde{a}(t,\varepsilon) + \widetilde{b}(t,\varepsilon)v(t,\varepsilon) + \widetilde{c}v^2(t,\varepsilon), \\
&\widetilde{a}(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 t(Ct+C), \qquad \widetilde{b}(t,\varepsilon) \equiv C\varepsilon t, \qquad \widetilde{c} \equiv C.
\end{aligned}
\tag{17.26}
$$

Здесь

$$
v_1(t,\varepsilon) = \max_{0\leqslant s\leqslant t} |u_1(s,\varepsilon)|,
$$
$$
v(t,\varepsilon) = \max_{0\leqslant s\leqslant t} \|u(s,\varepsilon)\|,
$$

$v_1(t,\varepsilon)$, $v(t,\varepsilon)$ — монотонно возрастающие, положительные, непрерывные по t функции,

$$
|u_1(s,\varepsilon)| \leqslant v_1(s,\varepsilon) \leqslant v_1(t,\varepsilon), \qquad \|u(s,\varepsilon)\| \leqslant v(s,\varepsilon) \leqslant v(t,\varepsilon).
$$

Так же, как в § 6, доказывается, что решение задачи (17.11) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$
\|u(t,\varepsilon)\| \leqslant v(t,\varepsilon) \leqslant \frac{2\widetilde{a}(t,\varepsilon)}{\widetilde{p} + \sqrt{\widetilde{r}}}
$$

при всех значениях t, ε из множества

$$
\begin{gathered}
\widetilde{p} \equiv 1 - \widetilde{b} > 0, \qquad \widetilde{r} \equiv \widetilde{p}^2 - 4\widetilde{a}\widetilde{c} > 0, \\
2\widetilde{a} < \delta(\widetilde{p} + \sqrt{\widetilde{r}}), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-\chi}, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}.
\end{gathered}
\tag{17.27}
$$

Подставим в (17.27) вместо $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, $\widetilde{c}$ их значения из (17.26). Получим

$$\begin{gathered}
1 - C\varepsilon t > 0, \qquad (1 - C\varepsilon t)^2 - \varepsilon^2 t(Ct + C) > 0, \\
\varepsilon^2 t(Ct + C) < \delta\left[1 - C\varepsilon t + \sqrt{(1 - C\varepsilon t)^2 - \varepsilon^2 t(Ct + C)}\right], \\
0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-\chi}, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}.
\end{gathered} \tag{17.28}$$

Если положить $\chi = 1$, $t = T\varepsilon^{-1}$, то неравенства (17.28) выполняются при достаточно малых значениях $|T|$, $|\varepsilon|$, при этом значение $(\widetilde{p} + \sqrt{\widetilde{r}})$ близко к 1. Отсюда следует: найдутся такие значения $T > 0$, $\varepsilon_* > 0$, что на множестве

$$0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-1}, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_* \tag{17.29}$$

решение задачи (17.11) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|u(t, \varepsilon)\| \leqslant v(t, \varepsilon) \leqslant \varepsilon^2 t(Ct + C). \tag{17.30}$$

Если положить $t = T\varepsilon^{-\chi}$, $0 \leqslant \chi < 1$, то неравенства (17.28) выполняются при достаточно малых значениях $|\varepsilon|$ и при этом значение $(\widetilde{p} + \sqrt{\widetilde{r}})$ близко к 1. Отсюда следует: для любых значений $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < 1$, найдется такое значение $\varepsilon_* > 0$, что при

$$0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-\chi}, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_* \tag{17.31}$$

решение задачи (17.11) существует, единственно и удовлетворяет неравенству (17.30).

Для переменной u_1 оценку (17.30) можно улучшить. Из (17.29)–(17.31) следуют неравенства

$$C\varepsilon(1 - e^{-t})v(t, \varepsilon) \leqslant C\varepsilon^3 t(Ct + C) \leqslant C\varepsilon^2 t.$$

Отсюда и из (17.26) следует:

$$v_1(t, \varepsilon) \leqslant C\varepsilon^2 t + Cv_1^2(t, \varepsilon). \tag{17.32}$$

При малых значениях $\varepsilon_* > 0$ множество (17.32) значений v_1 распадается на две непересекающиеся компоненты

$$\begin{gathered}
v_1(t, \varepsilon) \leqslant v_{11} \equiv \frac{C\varepsilon^2 t}{1 + \sqrt{1 - C\varepsilon^2 t}}, \\
v_1(t, \varepsilon) \geqslant v_{12} \equiv C(1 + \sqrt{1 - C\varepsilon^2 t}),
\end{gathered} \tag{17.33}$$

v_{11}, v_{12} — корни уравнения, которое получается из (17.32) при знаке равенства. Так как $v_1(t, \varepsilon)$ — непрерывная функция t, $v_1(0, \varepsilon) = 0$ и компоненты в (17.33) не пересекаются, то отсюда следует, что выполняется первое неравенство (17.33) и значит

$$|u_1(t, \varepsilon)| \leqslant v_1(t, \varepsilon) \leqslant C\varepsilon^2 t. \tag{17.34}$$

Из существования функции $u(t,\varepsilon)$ и из формулы (17.10) следуе существование функции $x(t,\varepsilon)$. Так как $u = x - X_1$, то отсюда и из (17.3 (17.34) получаем следующие результаты.

1. Найдутся такие значения $T > 0$, $\varepsilon_* > 0$, что на множестве (17.2 решение задачи (15.9) существует, единственно и удовлетворяет н равенствам

$$|x_1(t,\varepsilon) - X_{11}(t,\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon^2 t,$$
$$|x_2(t,\varepsilon) - X_{12}(t,\varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2 t(Ct + C). \qquad (17.3$$

2. Для любых значений $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < 1$, найдется такое значен $\varepsilon_* > 0$, что на множестве (17.31) решение задачи (15.9) существуе единственно и удовлетворяет неравенствам (17.35).

17.4. Функции r, φ, w

Равномерная сходимость. Для доказательства равномерной сходимос рядов (16.2) для ρ, ψ построим мажоранты для функций

$$z_3 \equiv \rho - a(t), \qquad z_4 \equiv \psi - \alpha(t,\mu).$$

Справедливы соотношения

$$z_i(t,\varepsilon,\mu) \ll \Gamma_z(t,\varepsilon) \equiv \frac{\varepsilon(Ct + C)}{1 - \varepsilon(Ct^2 + C)}(\arg\varepsilon),$$
$$g_i\big(a(t) + z_3, \alpha(t,\mu) + z_4\big) \ll \Gamma_g(z_3, z_4) \equiv \frac{K}{1 - z_3 - z_4}(\arg z_3, z_4), \qquad (17.36)$$
$$i = 1, 2,$$

где K — постоянная. Существование мажорирующей функции Γ_z следу из доказательства теоремы 2.3 в § 3. При этом $0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-\chi}$, $0 \leqslant \chi < 1$, $0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}$.

Существование мажорирующей функции Γ_g следует из аналити ности функций g_i. Действительно, из интегральной формулы Кош получаем:

$$g_i\big(a + z_3, \alpha + z_4\big) = (2\pi i)^{-2} \oint\limits_{|\nu_1|=1, |\nu_2|=1} \frac{g_i(a + \nu_1, \alpha + \nu_2)\, d\nu_1\, d\nu_2}{(\nu_1 - z_3)(\nu_2 - z_4)},$$

$$K \equiv \max_{\substack{C_3 \leqslant a \leqslant C_4, \alpha \in \mathbf{R},\\ |\nu_1|=1,\ |\nu_2|=1,\ i=1,2}} |g_i(a + \nu_1, \alpha + \nu_2)|.$$

Здесь использовано следующее свойство мажорирующих рядов:

$$\frac{1}{(1 - x_1)(1 - x_2)} \ll \frac{1}{1 - x_1 - x_2}(\arg x_1, x_2).$$

Рассмотрим уравнения для функций η_3, η_4:

$$\eta_3 = \Gamma_z(t,\varepsilon) + \varepsilon\Gamma_g(\eta_3,\eta_4), \qquad \eta_4 = \Gamma_z(t,\varepsilon) + \varepsilon\Gamma_g(\eta_3,\eta_4), \tag{17.37}$$

где Γ_z, Γ_g задаются формулами (17.36). Уравнения (17.37) легко решаются и имеют два решения. Рассмотрим решение, обращающееся в ноль при $\varepsilon = 0$:

$$\eta_3 = \eta_4 = \Gamma(t,\varepsilon), \tag{17.38}$$

$$\Gamma(t,\varepsilon) \equiv \frac{2\Gamma_z(t,\varepsilon) + \varepsilon K}{1 + 2\Gamma_z(t,\varepsilon) + \sqrt{[1 - 2\Gamma_z(t,\varepsilon)]^2 - 4\varepsilon K}}.$$

Из формул (17.36), (17.38) следует, что η_3, η_4 — аналитические функции ε и они разлагаются в ряды

$$\eta_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_i^{(k)}(t)\varepsilon^k, \qquad i = 3, 4, \tag{17.39}$$

которые мажорируются функциями

$$\eta_i(t,\varepsilon) \ll \frac{\varepsilon(Ct + C)}{1 - \varepsilon(Ct^2 + C)}(\arg\varepsilon). \tag{17.40}$$

Это следует из формул

$$\eta_i(t,\varepsilon) = \varepsilon(Ct + C)\widetilde{\eta}_i(t,\varepsilon), \qquad \widetilde{\eta}_i(t,\varepsilon) = \widetilde{\eta}_i\left(t, \frac{\widetilde{\varepsilon}}{Ct^2 + C}\right) \ll \frac{L_i}{1 - \widetilde{\varepsilon}},$$

$$\widetilde{\varepsilon} \equiv \varepsilon(Ct^2 + C), \qquad L_i \equiv \max_{t \geqslant 0, |\nu| = 1} \left|\widetilde{\eta}_i\left(t, \frac{\nu}{Ct^2 + C}\right)\right|.$$

Из (17.40) получаем: ряды (17.39) равномерно сходятся на множестве

$$0 \leqslant t \leqslant T|\varepsilon|^{-\chi}, \qquad 0 \leqslant \chi < 1/2, \qquad |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_*$$

при некотором значении $\varepsilon_* > 0$.

Ряды (17.39) мажорируют функции

$$\begin{aligned} z_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{(k)}(t,\mu)\varepsilon^k \ll \eta_3(t,\varepsilon)(\arg\varepsilon), \\ z_4 &= \sum_{k=1}^{\infty} \psi^{(k)}(t,\mu)\varepsilon^k \ll \eta_4(t,\varepsilon)(\arg\varepsilon), \end{aligned} \tag{17.41}$$

где $\rho^{(k)}(t,\mu)$, $\psi^{(k)}(t,\mu)$ — коэффициенты в (16.2). Для доказательства рассматриваются формулы, следующие из (17.37):

$$\eta_i^{(k)}(t) = \left[\Gamma_z(t,\varepsilon) + \varepsilon\Gamma_g\left(\sum_{j=0}^{k-1} \eta_3^{(j)}(t)\varepsilon^j, \quad \sum_{j=0}^{k-1} \eta_4^{(j)}(t)\varepsilon^j\right)\right]^{(k)}, \quad i = 1, 2,$$

и формулы (16.3) для $\rho^{(k)}(t,\mu)$, $\psi^{(k)}(t,\mu)$. Доказательство по индукции аналогично доказательству утверждения о мажорирующем ряде для $z(t,\varepsilon,\mu)$ в § 3. Из (17.41) получаем: ряды (16.2) сходятся равномерно на множестве

$$0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-\chi}, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\varepsilon}, \tag{17.42}$$

ряды (16.9) сходятся равномерно на множестве

$$0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^{-\chi}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*. \tag{17.43}$$

Оценка остаточного члена n-го порядка, $n \geqslant 0$. Из (17.40), (17.41) получим оценки остаточных членов на множестве (17.42):

$$\left|\rho(t,\varepsilon,\mu)-\rho_n(t,\varepsilon,\mu)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\rho^{(k)}(t,\mu)\varepsilon^k\right| \leqslant \varepsilon(Ct+C)\sum_{k=n}^{\infty}[\varepsilon(Ct^2+C)]^k =$$
$$= \frac{\varepsilon^{n+1}(Ct+C)(Ct^2+C)^n}{1-\varepsilon(Ct^2+C)} \leqslant \varepsilon^{n+1}(Ct^{2n+1}+C).$$

Аналогично

$$\left|\psi(t,\varepsilon,\mu) - \Psi_n(t,\varepsilon,\mu)\right| \leqslant \varepsilon^{n+1}(Ct^{2n+1}+C).$$

Так как $r(t,\varepsilon) = \rho(t,\varepsilon,\varepsilon)$, $\varphi(t,\varepsilon) = \psi(t,\varepsilon,\varepsilon)$, то на множестве (17.43) справедливы оценки остаточных членов

$$\left|r(t,\varepsilon) - R_n(t,\varepsilon)\right| \leqslant \varepsilon^{n+1}(Ct^{2n+1}+C),$$
$$\left|\varphi(t,\varepsilon) - \Phi_n(t,\varepsilon)\right| \leqslant \varepsilon^{n+1}(Ct^{2n+1}+C).$$

Из формул

$$w - W_n = r\cos\varphi - R_n\cos\Phi_n =$$
$$= (r-R_n)\cos\varphi - (\varphi-\Phi_n)R_n\int_0^1 \sin(\theta\varphi + \Phi_n - \theta\Phi_n)d\theta \tag{17.44}$$

следует оценка остаточного члена для функции w

$$|w - W_n| \leqslant |r-R_n| + C|\varphi-\Phi_n| \leqslant \varepsilon^{n+1}(Ct^{2n+1}+C), \tag{17.45}$$

справедливая на множестве (17.43). Здесь использована ограниченность функции $R_n(t,\varepsilon)$ на множестве (17.43) ($r = a(t)+z_3$, $a(t)$ — ограниченная функция, z_3 мажорируется функцией (17.40)).

Оценка остаточного члена первого порядка. Из результатов п. 17.3 и из формулы (15.7) для w следует, что $r(t,\varepsilon)$, $\varphi(t,\varepsilon)$, $w(t,\varepsilon)$ существуют на множествах (17.29), (17.31). Из (16.10), (17.10), (17.11), (17.44) получим формулы

$$u_3 \equiv r - R_1 = u_1 + \varepsilon \int_0^1 \left[\frac{\partial g_1}{\partial r}(r_9, \varphi_9) r_{10} + \frac{\partial g_1}{\partial \varphi}(r_9, \varphi_9) \varphi_{10} \right] d\theta,$$

$$u_4 \equiv \varphi - \Phi_1 = u_2 + \varepsilon \int_0^1 \left[\frac{\partial g_2}{\partial r}(r_9, \varphi_9) r_{10} + \frac{\partial g_2}{\partial \varphi}(r_9, \varphi_9) \varphi_{10} \right] d\theta, \tag{17.46}$$

$$u_5 \equiv w - W_1 = (r - R_1)\cos\varphi - (\varphi - \Phi_1) R_1 \int_0^1 \sin(\theta\varphi + \Phi_1 - \theta\Phi_1) d\theta,$$

$$r_9 \equiv a + \theta X_{11} + \theta u_1 + \varepsilon\theta g_1(r, \varphi), \qquad \varphi_9 \equiv \alpha + \theta X_{12} + \theta u_2 + \varepsilon\theta g_2(r, \varphi),$$
$$r_{10} \equiv X_{11} + u_1 + \varepsilon g_1(r, \varphi), \qquad \varphi_{10} \equiv X_{12} + u_2 + \varepsilon g_2(r, \varphi).$$

Из результатов п. 17.3 следует, что функции r_9, a, R_1, g_i, $\partial g_i/\partial r$, $\partial g_i/\partial \varphi$, $i = 1, 2$, ограничены. Отсюда и из (17.17), (17.30), (17.34) получаем неравенства

$$|r(t, \varepsilon) - R_1(t, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2 (Ct + C),$$
$$|\varphi(t, \varepsilon) - \Phi_1(t, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2 (Ct^2 + C),$$
$$|w - W_1(t, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2 (Ct^2 + C),$$

справедливые на множествах (17.29), (17.31).

Сформулируем полученные результаты через исходную независимую переменную τ.

17.5. Результаты

1. Найдутся постоянные $T > 0$, $\varepsilon_* > 0$, C, не зависящие от τ, ε и такие, что на множестве

   $$0 \leqslant \tau \leqslant T\varepsilon^{-2}, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$$

   решение задачи Ван дер Поля (15.1) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

   $$|w - W_1| \leqslant \varepsilon^2 (C\varepsilon^2\tau^2 + C), \tag{17.47}$$

   где $W_1 = W_1(t, \varepsilon)$ — функция (16.13), $t = \tau\varepsilon$.
2. Для любых значений $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < 1$, найдутся постоянные $\varepsilon_* > 0$, C, не зависящие от τ, ε и такие, что на множестве

   $$0 \leqslant \tau \leqslant T\varepsilon^{-1-\chi}, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_* \tag{17.48}$$

   решение задачи Ван дер Поля (15.1) существует, единственно и удовлетворяют неравенству (17.47).
3. Для любых значений $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < 1/2$, найдутся постоянные $\varepsilon_* > 0$, C, не зависящие от τ, ε и такие, что на множестве (17.48)

решение задачи Ван дер Поля (15.1) представимо в виде (16.11) через равномерно сходящиеся ряды и удовлетворяет неравенствам

$$|w - W_n| \leqslant \varepsilon^{n+1}[C(\varepsilon\tau)^{2n+1} + C], \qquad n \geqslant 0, \tag{17.49}$$

где $W_n = W_n(t, \varepsilon)$ — функция (16.12), $t = \tau\varepsilon$.

§ 18. Численные оценки точности асимптотического решения

18.1. Оценка точности нулевого приближения

Неравенства для остаточного члена. Обозначим

$$x_3 \equiv r - a(t), \quad x_4 \equiv \varphi - \alpha(t), \quad x_5 \equiv w - a(t)\cos\alpha(t), \\ \widehat{x} \equiv (x_1, \ldots, x_5). \tag{18.1}$$

Тогда $\widehat{x}$ — остаточный член нулевого приближения для функций x_1, x_2, r, φ, w. Здесь и дальше не указана зависимость функций от ε.

Для оценки остаточного члена напишем уравнения, следующие из (15.7)–(15.9), (18.1):

$$\begin{gathered} x_1(t) = \int\limits_0^t q(t,s)\widehat{G}_1(s)\,ds, \qquad x_2(t) = \int\limits_0^t \widehat{G}_2(s)\,ds, \\ x_3(t) = x_1(t) + \varepsilon g_1\big(a(t) + x_3(t), \alpha(t) + x_4(t)\big), \\ x_4(t) = x_2(t) + \varepsilon g_2\big(a(t) + x_3(t), \alpha(t) + x_4(t)\big), \\ x_5(t) = x_3(t)\cos\big(\alpha(t) + x_4(t)\big) - a(t)x_4(t)\int\limits_0^1 \sin\big(\alpha(t) + \theta x_4(t)\big)\,d\theta, \end{gathered} \tag{18.2}$$

$$\widehat{G}_1(t) \equiv x_3(t)\int\limits_0^1 \frac{dF_0}{dr}\big(a(t) + \theta x_3(t)\big)\,d\theta - \\ - \frac{dF_0}{dr}\big(a(t)\big)x_1(t) + \varepsilon h_1\big(a(t) + x_3(t), \alpha(t) + x_4(t)\big),$$

$$\widehat{G}_2(t) \equiv \varepsilon h_2\big(a(t) + x_3(t), \alpha(t) + x_4(t)\big).$$

Здесь a, α, g_i, h_i, q — функции (15.8), (15.9), (16.5).

Предположим, что при $0 \leqslant t \leqslant T$ выполняются неравенства

$$|x_i(t)| \leqslant \delta_i, \qquad i = \overline{1, 5}. \tag{18.3}$$

Тогда при $0 \leqslant t \leqslant T$ справедливы соотношения, следующие из (18.2):

$$|x_i(t, \varepsilon)| \leqslant Q_i(\delta, t) \qquad i = \overline{1, 5},$$

$$Q_1(\delta,t)\equiv\int\limits_0^t q(t,s)\Bigg\{\left|\frac{dF_0}{dr}\big(a(s)\big)\right|(\delta_1+\delta_3)+\frac{\delta_3^2}{8}\big(3a(s)+\delta_3\big)+$$

$$+\varepsilon\big(a(s)+\delta_3\big)\left[d_{11}+d_{12}\big(a(s)+\delta_3\big)^2+d_{13}\big(a(s)+\delta_3\big)^4\right]\Bigg\}ds,$$

$$Q_2(\delta,t)\equiv\varepsilon\int\limits_0^t\left[d_{21}+d_{22}\big(a(s)+\delta_3\big)^2+d_{23}\big(a(s)+\delta_3\big)^4\right]ds, \tag{18.4}$$

$$Q_3(\delta,t)\equiv\delta_1+\varepsilon\left[\frac{a(t)+\delta_3}{4}+\frac{\big(a(t)+\delta_3\big)^3}{32}+|C_1|\right],$$

$$Q_4(\delta,t)\equiv\delta_2+\varepsilon\left[\frac{1}{2}+\frac{\big(a(t)+\delta_3\big)^2}{4}+|C_2|\right],\quad Q_5(\delta,t)\equiv a(t)\delta_4+\delta_3.$$

Здесь d_{ij} — постоянные в оценках функций h_i из (15.9):

$$|h_1(r,\varphi)|\leqslant d_{11}r+d_{12}r^3+d_{13}r^5,\quad |h_2(r,\varphi)|\leqslant d_{21}+d_{22}r^2+d_{23}r^4,$$

$$d_{11}\equiv\max_{\varphi\in[0,2\pi]}\left|0{,}5\sin\varphi\cos^3\varphi\right|,$$

$$d_{12}\equiv\max_{\varphi\in[0,2\pi]}\left|0{,}125\sin\varphi\cos\varphi(2-\cos^2\varphi-6\cos^4\varphi)\right|,$$

$$d_{13}\equiv\max_{\varphi\in[0,2\pi]}\left|0{,}125\sin\varphi\cos^3\varphi(2-\cos^2\varphi-2\cos^4\varphi)\right|,$$

$$d_{21}\equiv\max_{\varphi\in[0,2\pi]}\left[0{,}25\sin^2(2\varphi)\right],$$

$$d_{22}\equiv\max_{\varphi\in[0,2\pi]}\left[1{,}5\sin^2\varphi\cos^4\varphi\right],\quad d_{23}\equiv\max_{\varphi\in[0,2\pi]}\left[0{,}5\sin^2\varphi\cos^6\varphi\right].$$

При счете приняты округленные значения постоянных:

$$d_{11}=0{,}163,\qquad d_{12}=0{,}144,\qquad d_{13}=0{,}0321,$$
$$d_{21}=0{,}250,\qquad d_{22}=0{,}222,\qquad d_{23}=0{,}0528.$$

Оценка интервала существования решения. Обозначим

$$Q_{i*}(\delta,t)\equiv\max_{0\leqslant s\leqslant t}Q_i(\delta,s),\quad i=\overline{1,5}. \tag{18.5}$$

Зададим числа δ_{in}, $i=\overline{1,5}$. Предположим, что при $0\leqslant t\leqslant T_{0n}$ выполняются неравенства

$$Q_{i*}(\delta_n,t)\leqslant\delta_{in},\quad i=\overline{1,5},\quad \delta_n\equiv(\delta_{1n},\ldots,\delta_{5n}). \tag{18.6}$$

Тогда на отрезке $0\leqslant t\leqslant T_{0n}$ решение задачи (15.9), (18.1) существует, единственно и удовлетворяет неравенствам

$$|x_i(t)|\leqslant\delta_{in},\quad i=\overline{1,5}. \tag{18.7}$$

Таблица

r°	ε	τ_0	τ_1	$\delta(1)$	$\widetilde{\delta}(1)$	$\delta(10)$	$\widetilde{\delta}(10)$
1	0,01	158	173	$47 \cdot 10^{-6}$	$17 \cdot 10^{-7}$	0,00050	$57 \cdot 10^{-7}$
				$45 \cdot 10^{-6}$	$26 \cdot 10^{-7}$	0,00047	$16 \cdot 10^{-6}$
				0,0029	0,0031	0,0035	0,0032
				0,0101	0,0013	0,0103	0,0026
				0,013	0,0028	0,015	0,0029
1	0,1	8,1	11,4	0,0056	0,00018	—	0,0080
				0,0049	0,00018	—	0,0070
				0,037	0,036	—	0,062
				0,11	0,016	—	0,038
				0,15	0,035	—	0,073
1	0,4	0,54	0,71	—	—	—	—
1	1,0	0,027	—	—	—	—	—
3	0,01	15	22	0,0065	0,00011	0,11	0,0017
				0,00068	$37 \cdot 10^{-6}$	0,0070	0,00042
				0,023	0,027	0,13	0,033
				0,046	0,019	0,047	0,020
				0,16	0,034	0,27	0,060
3	0,1	0,24	0,26	—	—	—	—
3	0,4	—	—	—	—	—	—

Это следует из теоремы о продолжении решения системы обыкновен ных дифференциальных уравнений в области гладкости правых часте уравнений и из монотонности функций $Q_{i*}(\delta, t)$ по t.

Таким образом, оценка интервала независимой переменной T_{0n} опре деляется решением системы неравенств (18.6). Решение системы (18.6 существует не при всех значениях параметров. Выделим из (18.6) подси стему

$$Q_{1*}(\delta_n, t) \leqslant \delta_{1n}, \quad Q_{3*}(\delta_n, t) \leqslant \delta_{3n}. \tag{18.8}$$

Из (18.4), (18.7) следует, что δ_{1n}, δ_{3n} должны принадлежать множеству

$$Q_{3*}(\delta_n, 0) < \delta_{3n}. \tag{18.9}$$

Тогда $T_{0n} > 0$ существует и определяется решением системы (18.8 а значения δ_{2n}, δ_{4n}, δ_{5n} вычисляются последовательно по формулам

$$\delta_{jn} \equiv Q_{j*}(\delta_n, T_{0n}), \quad j = 2, 4, 5.$$

Для разных значений δ_{1n}, δ_{3n} получаются разные значения T_{0n}.

Численная оценка интервала существования решения. Был рассмотре итерационный процесс со следующими значениями:

$$\delta_{j0} = 1, \quad \delta_{jn} = \frac{1}{2}[\delta_{jn-1} + Q_{j*}(\delta_{n-1}, T_{0n-1})], \quad j = 1, 3, \quad n = \overline{1, 20}. \tag{18.10}$$

В табл. 1 представлены результаты вычисления для заданных значений r°, ε при $\varphi^\circ = 0$. Приняты следующие обозначения:

$$T_0 \equiv \max_{n=\overline{0,20}} T_{0n}, \quad \tau_0 \equiv \frac{T_0}{\varepsilon}.$$

Из (15.7), (15.8) следует, что решение задачи Ван дер Поля (15.1) существует, по крайней мере, на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$. Начальные значения в (15.1) равны соответственно $w^\circ = r^\circ$, $\dot{w}^\circ = 0$. Для сравнения в табл. 1 приведены оценки интервала существования решения τ_1, полученные с помощью первого приближения в п. 18.2: решение задачи (15.1) существует, по крайней мере, на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$. Значения τ_0, τ_1 округлены в сторону уменьшения.

Отметим, что при $r^\circ = 3$, $\varepsilon = 0{,}4$ множество (18.9) значений δ_1, δ_3 пусто, поэтому τ_0 не существует. Это означает, что предложенный метод не позволяет получить оценку интервала существования решения при $r^\circ = 3$, $\varepsilon = 0{,}4$.

Аналогично, при $r^\circ = 1$, $\varepsilon = 1$ и $r^\circ = 0{,}4$, $\varepsilon = 0{,}4$ не существует τ_1 (смотрите п. 18.2).

Численная оценка остаточного члена. Для значений $\tau = 1$, $\tau = 10$ были получены численные оценки остаточного члена. При этом рассматривался итерационный процесс (18.10) до тех пор, пока оценка интервала существования решения не становилась равным заданному значению τ или больше него. После этого оценивался остаточный член по следующему алгоритму:

$$\delta_{in} \equiv Q_{i*}(\delta_{n-1}, \tau), \qquad i = \overline{1,5}.$$

В табл. 1 представлены результаты вычисления,

$$\delta \equiv \lim_{n\to\infty} \delta_n, \qquad \delta(1) = \delta|_{\tau=1}, \qquad \delta(10) = \delta|_{\tau=10}.$$

Для сравнения в табл.1 приведены значения $\widetilde{\delta}$ — оценки остаточного члена нулевого приближения, полученные с помощью первого приближения в п. 18.2,

$$|x_i(t)| \leqslant \widetilde{\delta}_{in}, \qquad i = \overline{1,5}, \qquad \widetilde{\delta}_n = (\widetilde{\delta}_{1n}, \ldots, \widetilde{\delta}_{5n}),$$
$$\widetilde{\delta} \equiv \lim_{n\to\infty} \widetilde{\delta}_n, \qquad \widetilde{\delta}(1) = \widetilde{\delta}|_{\tau=1}, \qquad \widetilde{\delta}(10) = \widetilde{\delta}|_{\tau=10}.$$

В табл.1 даны округленные (в сторону увеличения) значения $\delta(\tau)$, $\widetilde{\delta}(\tau)$. Таким образом, на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant 1$

$$|x_i| \leqslant \delta_i(1), \qquad |x_i| \leqslant \widetilde{\delta}_i(1), \qquad i = \overline{1,5},$$

на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant 10$

$$|x_i| \leqslant \delta_i(10), \qquad |x_i| \leqslant \widetilde{\delta}_i(10), \qquad i = \overline{1,5}.$$

Если $\tau_0 < \tau$ или $\tau_1 < \tau$, то приведенный алгоритм не позволяет получить оценки $\delta(\tau)$, $\widetilde{\delta}(\tau)$. В табл.1 стоят соответственно прочерки.

18.2. Оценка точности первого приближения

Неравенства для остаточного члена. Обозначим

$$u_3 \equiv r - R_1(t), \qquad u_4 \equiv \varphi - \Phi_1(t), \qquad u_5 \equiv w - R_1(t)\cos\Phi_1(t),$$
$$\widehat{u} \equiv (u_1, \ldots, u_5). \tag{18.11}$$

Тогда $\widehat{u}$ — остаточный член первого порядка асимптотического разложения функций x_1, x_2, r, φ, w. Для оценки остаточного члена напишем уравнения, следующие из (15.7), (15.8), (17.11), (17.12), (17.46), (18.11):

$$u_1(t) = \int_0^t q(t,s)\, G_1(u(s), s)\, ds, \qquad u_2(t) = \int_0^t G_2(u(s), s)\, ds, \tag{18.12}$$

$$u_3(t) = G_3(u,t), \qquad u_4(t) = G_4(u,t), \qquad u_5(t) = G_5(u,t),$$

$$G_1(u,t) \equiv \big[F_0(r) - F_0(R_1)\big] + \left[F_0(R_1) - F_0(a) - \frac{dF_0}{dr}(a)\, \widehat{R}_1\right] -$$
$$- \frac{dF_0}{dr}(a)\, u_1 + \varepsilon\big[h_1(r,\varphi) - h_1(a,\alpha)\big] = \int_0^1 \frac{dF_0}{dr}(R_1 + \theta u_3)\, d\theta\, u_3 +$$
$$+ \left[F_0(R_1) - F_0(a) - \frac{dF_0}{dr}(a)\, \widehat{R}_1\right] - \frac{dF_0}{dr}(a)\, u_1 +$$
$$+ \varepsilon \int_0^1 \left[\frac{\partial h_1}{\partial r}(r_*, \varphi_*) \cdot (u_3 + \widehat{R}_1) + \frac{\partial h_1}{\partial \varphi}(r_*, \varphi_*) \cdot (u_4 + \widehat{\Phi}_1)\right] d\theta,$$

$$G_2(u,t) \equiv \varepsilon \left[h_2(r,\varphi) - h_2(a,\alpha)\right] =$$
$$= \varepsilon \int_0^1 \left[\frac{\partial h_2}{\partial r}(r_*, \varphi_*) \cdot (u_3 + \widehat{R}_1) + \frac{\partial h_2}{\partial \varphi}(r_*, \varphi_*) \cdot (u_4 + \widehat{\Phi}_1)\right] d\theta,$$

$$G_3(u,t) = u_1 + \varepsilon \int_0^1 \left[\frac{\partial g_1}{\partial r}(r_*, \varphi_*)\ (u_3 + \widehat{R}_1) + \frac{\partial g_1}{\partial \varphi}(r_*, \varphi_*)\ (u_4 + \widehat{\Phi}_1)\right] d\theta,$$

$$G_4(u,t) = u_2 + \varepsilon \int_0^1 \left[\frac{\partial g_2}{\partial r}(r_*, \varphi_*)\ (u_3 + \widehat{R}_1) + \frac{\partial g_2}{\partial \varphi}(r_*, \varphi_*)\ (u_4 + \widehat{\Phi}_1)\right] d\theta,$$

$$G_5(u,t) = u_3 \cos(\Phi_1 + u_4) - R_1 u_4 \int_0^1 \sin(\Phi_1 + \theta u_4)\, d\theta,$$

$$r = R_1 + u_3, \quad \varphi = \Phi_1 + u_4, \quad r_* \equiv a + \theta \widehat{R}_1 + \theta u_3, \quad \varphi_* \equiv \alpha + \theta \widehat{\Phi}_1 + \theta u_4,$$
$$R_1 = R_1(t), \quad \Phi_1 = \Phi_1(t), \quad \widehat{R}_1 \equiv R_1 - a, \quad \widehat{\Phi}_1 = \Phi_1 - \alpha,$$
$$a = a(t), \quad \alpha = \alpha(t).$$

Здесь не указана зависимость функций от ε.

Предположим, что при $0 \leqslant t \leqslant T$ выполняются неравенства

$$|u_i(t)| \leqslant \Delta_i, \qquad i = \overline{1,5}. \tag{18.13}$$

Тогда при $0 \leqslant t \leqslant T$ справедливы неравенства, следующие из (18.12):

$$|u_i(t,\varepsilon)| \leqslant S_i(\Delta, t) \quad i = \overline{1,5}, \quad \Delta \equiv (\Delta_1, \ldots, \Delta_5), \tag{18.14}$$

$$S_1(\Delta, t) \equiv \int\limits_0^t q(t,s) \cdot H_1(\Delta, s)\, ds, \quad S_2(\Delta, t) \equiv \varepsilon \int\limits_0^t H_2(\Delta, s)\, ds,$$
$$S_3(\Delta, t) \equiv \Delta_1 + \varepsilon P_5(\Delta_3, t)\big(\Delta_3 + |\widehat{R}_1|\big) + \varepsilon P_6(\Delta_3, t)\big(\Delta_4 + |\widehat{\Phi}_1|\big),$$
$$S_4(\Delta, t) \equiv \Delta_2 + \varepsilon P_7(\Delta_3, t)\big(\Delta_3 + |\widehat{R}_1|\big) + \varepsilon P_8(\Delta_3, t)(\Delta_4 + |\widehat{\Phi}_1|),$$
$$S_5(\Delta, t) \equiv \Delta_3 + |R_1|\ \Delta_4,$$
$$H_1(\Delta, t) \equiv \left|\frac{dF_0}{dr}(R_1)\right|\Delta_3 + \left|\frac{dF_0}{dr}(a)\right|\ \Delta_1 + \frac{\Delta_3^2}{8}\big(3|R_1| + \Delta_3\big) +$$
$$+ \left|F_0(R_1) - F_0(a) - \frac{dF_0}{dr}(a)\widehat{R}_1\right| +$$
$$+ \varepsilon P_1(\Delta_3, t)\big(\Delta_3 + |\widehat{R}_1|\big) + \varepsilon P_2(\Delta, t)\big(\Delta_4 + |\widehat{\Phi}_1|\big),$$
$$H_2(\Delta, t) \equiv P_3(\Delta_3, t)\big(\Delta_3 + |\widehat{R}_1|\big) + P_4(\Delta_3, t)\big(\Delta_4 + |\widehat{\Phi}_1|\big),$$
$$P_1(\Delta_3, t) \equiv e_{10} + e_{12}P_{12} + e_{14}P_{14},$$
$$P_2(\Delta_3, t) \equiv e_{21}P_{21} + e_{23}P_{23} + e_{25}P_{25},$$
$$P_3(\Delta_3, t) \equiv e_{31}P_{21} + e_{33}P_{23}, \qquad P_4(\Delta_3, t) \equiv e_{40} + e_{42}P_{12} + e_{44}P_{14},$$
$$P_5(\Delta_3, t) \equiv e_{50} + e_{52}P_{12}, \qquad P_6(\Delta_3, t) \equiv e_{61}P_{21} + e_{63}P_{23},$$
$$P_7 \equiv \frac{1}{4}(2a + \Delta_3 + |\widehat{R}_1|), \qquad P_8(\Delta_3, t) \equiv e_{80} + e_{82}P_{12},$$
$$P_{12} \equiv a^2 + a\ \widehat{R}_1 + \frac{\widehat{R}_1^2}{3} + \frac{\Delta_3}{3}\ (3a + 2|\widehat{R}_1|) + \frac{\Delta_3^2}{3},$$
$$P_{14} \equiv a^4 + 2a^3\widehat{R}_1 + 2\big(a\ \widehat{R}_1\big)^2 + a\widehat{R}_1^3 + \frac{\widehat{R}_1^4}{5} + \frac{a\ \Delta_3}{3}\ (6a^2 + 8a\ \widehat{R}_1 + 3\widehat{R}_1^2) +$$
$$+ \frac{\Delta_3}{15}\big(2\ |\widehat{R}_1| + 3\Delta_3\big)\big(10a^2 + 15a\widehat{R}_1 + 6\widehat{R}_1^2\big) + \frac{\Delta_3^3}{5}\big(5a + 4|\widehat{R}_1|\big) + \frac{\Delta_3^4}{5},$$

$$P_{21} \equiv a + \frac{\Delta_3 + |\widehat{R}_1|}{2},$$

$$P_{23} \equiv \frac{a}{3}\left[3a^2 + 3a\widehat{R}_1 + \widehat{R}_1^2 + \Delta_3(3a + 2|\widehat{R}_1|) + \Delta_3^2\right] + \\ + \frac{\Delta_3 + |\widehat{R}_1|}{12}\left[6a^2 + 8a\widehat{R}_1 + 3\widehat{R}_1^2 + 2\Delta_3(4a + 3|\widehat{R}_1|) + 3\Delta_3^2\right],$$

$$P_{25} \equiv \frac{a}{5}\left[5a^4 + 10a^3\widehat{R}_1 + 10(a\widehat{R}_1)^2 + 5a\widehat{R}_1^3 + \widehat{R}_1^4\right] + \\ + \frac{a^2\Delta_3}{3}(6a^2 + 8a\widehat{R}_1 + 3\widehat{R}_1^2) + \\ + \frac{a\Delta_3}{15}\left(3\Delta_3 + 2|\widehat{R}_1|\right)\left(10a^2 + 15a\widehat{R}_1 + 6\widehat{R}_1^2\right) + \\ + \frac{a\Delta_3^3}{5}\left(5a + 4|\widehat{R}_1|\right) + \frac{a\Delta_3^4}{5} + \\ + \left(\Delta_3 + |\widehat{R}_1|\right)\left\{\frac{1}{30}\left[15a^4 + 40a^3\widehat{R}_1 + 45(a\widehat{R}_1)^2 + 24a\widehat{R}_1^3 + 5\widehat{R}_1^4\right] + \right. \\ + \frac{2a\Delta_3}{15}\left(10a^2 + 15a\,\widehat{R}_1 + 6\widehat{R}_1^2\right) + \\ \left. + \frac{\Delta_3}{30}\left(3\Delta_3 + |\widehat{R}_1|\right)(15a^2 + 24a\widehat{R}_1 + 10\widehat{R}_1^2) + \frac{2\Delta_3^3}{15}\left(6a + 5|\widehat{R}_1|\right) + \frac{\Delta_3^4}{6}\right\}.$$

Здесь e_{ij} — постоянные в оценках производных функций g_i, h_i из (15.8), (15.9):

$$\left|\frac{\partial h_1}{\partial r}\right| \leqslant e_{10} + e_{12}r^2 + e_{14}r^4, \qquad \left|\frac{\partial h_1}{\partial \varphi}\right| \leqslant e_{21}|r| + e_{23}|r|^3 + e_{25}|r|^5,$$

$$\left|\frac{\partial h_2}{\partial r}\right| \leqslant e_{31}|r| + e_{33}|r|^3, \qquad \left|\frac{\partial h_2}{\partial \varphi}\right| \leqslant e_{40} + e_{42}|r|^2 + e_{44}|r|^4,$$

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial r}\right| \leqslant e_{50} + e_{52}r^2, \qquad \left|\frac{\partial g_1}{\partial \varphi}\right| \leqslant e_{61}|r| + e_{63}|r|^3,$$

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial r}\right| \leqslant \frac{|r|}{2}, \qquad \left|\frac{\partial g_2}{\partial \varphi}\right| \leqslant e_{80} + e_{82}r^2,$$

$$e_{10} \equiv \max_{\varphi\in[0,2\pi]}\left|\frac{1}{2}\sin\varphi\cos^3\varphi\right|, \quad e_{12} \equiv \max_{\varphi\in[0,2\pi]}\left|\frac{3}{8}\sin\varphi\cos\varphi(2 - \cos^2\varphi - 6\cos^4\varphi)\right|,$$

$$e_{14} \equiv \max_{\varphi\in[0,2\pi]}\left|\frac{5}{8}\sin\varphi\cos^3\varphi(2 - \cos^2\varphi - 2\cos^4\varphi)\right|,$$

$$e_{21} \equiv \max_{\varphi\in[0,2\pi]}\left|\frac{1}{2}\cos^2\varphi(4\cos^2\varphi - 3)\right|,$$

$$e_{23} \equiv \max_{\varphi\in[0,2\pi]} \left|\frac{1}{8}(36\cos^6\varphi - 26\cos^4\varphi - 7\cos^2\varphi + 2)\right|,$$

$$e_{25} \equiv \max_{\varphi\in[0,2\pi]} \left|\frac{1}{8}\cos^2\varphi(-16\cos^6\varphi + 8\cos^4\varphi + 13\cos^2\varphi - 6)\right|,$$

$$e_{31} \equiv \max_{\varphi\in[0,2\pi]} (3\sin^2\varphi\cos^4\varphi), \quad e_{33} \equiv \max_{\varphi\in[0,2\pi]} (2\sin^2\varphi\cos^6\varphi),$$

$$e_{40} \equiv \max_{\varphi\in[0,2\pi]} \left|\frac{1}{2}\sin(4\varphi)\right|, \quad e_{42} \equiv \max_{\varphi\in[0,2\pi]} |3\sin\varphi\cos^3\varphi(3\cos^2\varphi - 2)|,$$

$$e_{44} \equiv \max_{\varphi\in[0,2\pi]} |\sin\varphi\cos^5\varphi(4\cos^2\varphi - 3)|, \quad e_{50} \equiv \max_{\varphi\in[0,2\pi]} \left|\frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right|,$$

$$e_{52} \equiv \max_{\varphi\in[0,2\pi]} \left|\frac{3}{32}\sin(4\varphi)\right|, \quad e_{61} \equiv \max_{\varphi\in[0,2\pi]} \left|\frac{1}{2}\cos(2\varphi)\right|,$$

$$e_{63} \equiv \max_{\varphi\in[0,2\pi]} \left|\frac{1}{8}\cos(4\varphi)\right|, \quad e_{80} \equiv \max_{\varphi\in[0,2\pi]} \left|\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right|,$$

$$e_{82} \equiv \max_{\varphi\in[0,2\pi]} \left|\cos^3\varphi\sin\varphi\right|.$$

При счете приняты округленные (в сторону увеличения) значения постоянных:

$$e_{10} = 0{,}163, \quad e_{12} = 0{,}431, \quad e_{14} = 0{,}161, \quad e_{21} = 0{,}5,$$

$$e_{23} = 0{,}625, \quad e_{25} = 0{,}141, \quad e_{31} = 0{,}445, \quad e_{33} = 0{,}211,$$

$$e_{40} = 0{,}5, \quad e_{42} = 0{,}569, \quad e_{44} = 0{,}160, \quad e_{50} = 0{,}250,$$

$$e_{52} = 0{,}0938, \quad e_{61} = 0{,}5, \quad e_{63} = 0{,}125, \quad e_{80} = 0{,}5, \quad e_{82} = 0{,}325.$$

Оценка интервала существования решения. Обозначим

$$S_{i*}(\Delta, t) \equiv \max_{0\leqslant s\leqslant t} S_i(\Delta, s), \qquad i = \overline{1,5}. \tag{18.15}$$

Зададим числа Δ_{in}, $i = \overline{1,5}$. Предположим, что при $0 \leqslant t \leqslant T_{1n}$ выполняются неравенства

$$S_{i*}(\Delta_n, t) \leqslant \Delta_{in}, \quad i = \overline{1,5}, \quad \Delta_n \equiv (\Delta_{1n}, \ldots, \Delta_{5n}). \tag{18.16}$$

Тогда на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T_{1n}$ решение задачи (17.11), (18.11) существует, единственно и удовлетворяет неравенствам

$$|u_i(t)| \leqslant \Delta_{in}, \qquad i = \overline{1,5}.$$

Это следует из теоремы о продолжении решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений в области гладкости правых частей уравнений и из монотонности функций $S_{i*}(\Delta, t)$ по t. Таким образом,

оценка интервала существования решения T_{1n} определяется решением системы неравенств (18.16). Решение системы (18.16) существует не при всех значениях параметров Δ_{1n}, ..., Δ_{5n}.

Численная оценка интервала существования решения. Был рассмотрен итерационный процесс со следующими значениями:

$$\Delta_{i0} = D_0, \quad \Delta_{in} = \frac{1}{2}\left[\Delta_{i\ n-1} + S_{i*}(\Delta_{n-1}, T_{1\ n-1})\right], \quad i = \overline{1,5}, \quad n = \overline{1,20}. \tag{18.17}$$

В табл. 2 представлены результаты счета для заданных значений w°, ε, D_0 и $\dot{w}^\circ = 0$. Приняты следующие обозначения:

$$T_1 \equiv \max_{n=\overline{0,20}} T_{1n}, \qquad \tau_1 \equiv \frac{T_1}{\varepsilon}, \qquad \tau_* \equiv \max(\tau_0, \tau_1).$$

Таблица 2

w°	ε	D_0	τ_*	$\widetilde{\delta}_5(1)$	$\widetilde{\delta}_5(10)$	$\Delta_5(1)$	$\Delta_5(10)$
1	0,01	1,0	173	0,0028	0,0029	0,000053	0,000064
1	0,02	1,0	84,1	0,0055	0,0063	0,00021	0,00030
1	0,03	1,0	54,2	0,0085	0,011	0,00049	0,00079
1	0,04	1,0	39,2	0,012	0,015	0,00089	0,0017
1	0,05	1,0	30,0	0,015	0,020	0,0015	0,0031
1	0,06	1,0	23,8	0,019	0,027	0,0022	0,0052
1	0,07	1,0	19,4	0,023	0,034	0,0030	0,0085
1	0,08	1,0	16,1	0,026	0,044	0,0041	0,014
1	0,09	1,0	13,5	0,031	0,057	0,0053	0,021
1	0,1	1,0	11,4	0,035	0,073	0,0067	0,033
1	0,2	1,0	2,91	0,097	—	0,039	—
1	0,3	1,0	1,38	0,25	—	0,16	—
1	0,4	0,8	0,71	—	—	—	—
1	0,5	0,5	0,37	—	—	—	—
1	0,6	0,1	0,22	—	—	—	—
1	0,7	0,1	0,10*	—	—	—	—
1	0,8	0,04	0,053*	—	—	—	—
1	0,9	—	0,050*	—	—	—	—
1	1,0	—	0,027*	—	—	—	—
3	0,01	1,0	22	0,034	0,060	0,0051	0,0077
3	0,02	1,0	10,1	0,074	0,19	0,021	0,078
3	0,03	1,0	5,9	0,14	—	0,055	—
3	0,04	1,0	3,8	0,22	—	0,12	—
3	0,05	1,0	2,5	0,33	—	0,21	—
3	0,06	1,0	1,7	0,51	—	0,36	—
3	0,07	1,0	1,2	0,84	—	0,66	—
3	0,08	1,0	0,72	—	—	—	—
3	0,09	1,0	0,34	—	—	—	—
3	0,1	0,6	0,26	—	—	—	—
3	0,2	—	0,040*	—	—	—	—
3	0,3	—	0,0074*	—	—	—	—

Если $\tau_* = \tau_0$, то численное значение τ_* помечено в табл. 2 звездочкой.

Из (15.7), (15.8), (17.10) следует, что решение задачи Ван дер Поля (15.1) существует, по крайней мере, на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_*$.

Прочерк D_0 означает, что при данных параметрах w°, ε множество (18.16) пусто при всех значениях $\Delta_{1n}, \ldots, \Delta_{5n}$.

Численная оценка остаточного члена первого порядка. Для значений $\tau = 1$, $\tau = 10$ были получены численные оценки остаточного члена. При этом рассматривался итерационный процесс (18.17) до тех пор, пока оценка интервала существования решения не становилась равным заданному значению τ или больше него. После этого оценивался остаточный член по следующему алгоритму:

$$\Delta_{in} \equiv S_{i*}(\Delta_{n-1}, \tau), \qquad i = \overline{1, 5}.$$

В табл. 2 представлены результаты вычисления,

$$\Delta_5(1) \equiv \Delta_5|_{\tau=1}, \qquad \Delta_5(10) \equiv \Delta_5|_{\tau=10}.$$

Оценка остаточного члена нулевого порядка. Из (17.10), (18.1), (18.11) следуют формулы

$$x_1 = u_1 + X_{11}, \qquad x_2 = u_2 + X_{12}, \qquad x_3 = u_3 + \widehat{R}_1,$$
$$x_4 = u_4 + \widehat{\Phi}_1, \qquad x_5 = u_5 + R_1 \cos \Phi_1 - a \cos \alpha.$$

Отсюда получаем следующие оценки остаточного члена нулевого порядка асимптотического разложения функций x_1, x_2, r, φ, w:

$$\begin{gathered} |x_i| \leqslant \widetilde{\delta}_i, \quad i = \overline{1, 5}, \\ \widetilde{\delta}_j(t) = \Delta_j(t) + \max_{0\leqslant s\leqslant t} |X_{1j}|, \quad j = 1, 2, \\ \widetilde{\delta}_3(t) = \Delta_3(t) + \max_{0\leqslant s\leqslant t} |\widehat{R}_1(s)|, \quad \widetilde{\delta}_4(t) = \Delta_4(t) + \max_{0\leqslant s\leqslant t} |\widehat{\Phi}_1(s)|, \\ \widetilde{\delta}_5(t) = \Delta_5(t) + \max_{0\leqslant s\leqslant t} \bigl|R_1(s) \cos \Phi_1(s) - a(s) \cos \alpha(s)\bigr|. \end{gathered} \tag{18.18}$$

В табл. 2 приведены значения $\widetilde{\delta}$, полученные по формулам (18.18), так как они оказались меньше соответствующих оценок δ из п. 18.1. Прочерки $\widetilde{\delta}_5$, Δ_5 вызваны тем, что полученная оценка интервала существования решения оказалась меньше рассматриваемого значения τ.

18.3. Результаты

1. Для значений w°, ε из табл. 2 и $\dot{w}^\circ = 0$ решение задачи Ван дер Поля (15.1) существует, по крайней мере, на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_*$.
2. На отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ справедливы неравенства

$$|w - W_0| \leqslant \widetilde{\delta}_5(1), \qquad |w - W_1| \leqslant \Delta_5(1).$$

На отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant 10$ справедливы неравенства

$$|w - W_0| \leqslant \widetilde{\delta}_5(10), \qquad |w - W_1| \leqslant \Delta_5(10).$$

Здесь W_0, W_1 — асимптотические решения (16.13) нулевого и первого порядков для задачи Ван дер Поля (15.1). Значения τ_*, $\widetilde{\delta}_5$, Δ_5 приведены в табл. 2. Звездочкой помечены те значения τ_*, которые получены с помощью нулевого приближения в п. 18.1. Остальные значения τ_* получены с помощью первого приближения в п. 18.2. Прочерки $\widetilde{\delta}_5$, Δ_5 вызваны тем, что полученная оценка интервала существования решения τ_* оказалась меньше рассматриваемого значения τ.

§ 19. Дополнение о задаче Ван дер Поля

В § 1–§ 18 рассмотрено приложение теории почти регулярной задачи Коши к уравнению Ван дер Поля. В настоящем параграфе сделаны дополнительные расчеты по асимптотике первого порядка и рассмотрено периодическое решение уравнения Ван дер Поля.

19.1. Асимптотика первого порядка

В § 16 построено асимптотическое решение первого порядка (16.13) для уравнения Ван дер Поля. Упростим его, выделив в формулах (16.10) для X_{11}, X_{12} члены порядка ε. Для этого воспользуемся высокой частотой гармонических функций с аргументом α и применим интегрирование по частям к интегралам (16.10). Для примера рассмотрим интегрирование функции в формуле для X_{11}, которая получается, если в g_1 оставить первое слагаемое из (15.8), а h_1 положить равным нулю.

$$\begin{aligned}
I(t,\varepsilon) &\equiv \varepsilon \int\limits_0^t \frac{q(t,s)a(s)}{8}\left(1-\frac{3}{4}a^2(s)\right)\sin 2\alpha(s,\varepsilon)\,ds = \\
&= -\frac{\varepsilon^2\, q(t,s)\, a(s)}{16}\left(1-\frac{3a^2(s)}{4}\right)\cos 2\alpha(s,\varepsilon)\Big|_{s=0}^{s=t} + \\
&\quad + \frac{\varepsilon^2}{16}\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial s}\left[q(t,s)a(s)\left(1-\frac{3}{4}a^2(s)\right)\right]\cos 2\alpha(s,\varepsilon)\,ds,
\end{aligned} \qquad (19.1)$$

$$I(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \qquad t \geqslant 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Аналогичным образом рассмотрим все слагаемые в формулах (16.10) для X_{11}, X_{12}. Получим формулы

$$X_1 = \overline{X}_1 + \Delta X_1, \quad \overline{X}_1 = (\overline{X}_{11}, \overline{X}_{12}), \quad \Delta X_1 = (\Delta X_{11}, \Delta X_{12}), \qquad (19.2)$$

$$R_1 = \overline{R}_1 + \Delta R_1, \quad \Phi_1 = \overline{\Phi}_1 + \Delta\Phi_1,$$

$$\overline{X}_{11}(t,\varepsilon) = -\varepsilon C_1\left[1 - \frac{a(t)}{r^\circ}\cdot\frac{4-a^2(t)}{4-(r^\circ)^2}\right],$$

$$\overline{X}_{12}(t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon t}{16}+\frac{\varepsilon}{8}\ \ln a(t)-\frac{5\varepsilon a^2(t)}{64}-\frac{\varepsilon}{8}\ \ln r^\circ+\frac{5\varepsilon(r^\circ)^2}{64},$$

$$\overline{R}_1(t,\varepsilon)=a(t)+\varepsilon C_1\frac{a(t)}{r^\circ}\cdot\frac{4-a^2(t)}{4-(r^\circ)^2}+$$

$$+\frac{\varepsilon a(t)}{4}\sin\big(2\alpha(t,\varepsilon)\big)\left[1-\frac{a^2(t)}{4}\cos\big(2\alpha(t,\varepsilon)\big)\right],$$

$$\overline{\Phi}_1(t,\varepsilon)=\alpha(t,\varepsilon)+\frac{\varepsilon t}{16}+\varepsilon\left[\frac{\ln a(t)}{8}-\frac{5a^2(t)}{64}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos^2\alpha(t,\varepsilon)}{2}\left(1-\frac{a^2(t)}{2}\cos^2\alpha(t,\varepsilon)\right)+C_5\right],$$

$$C_5\equiv-\frac{\ln r^\circ}{8}+\frac{5(r^\circ)^2}{64}-\frac{\cos^2\varphi^\circ}{2}\left[1-\frac{(r^\circ)^2}{2}\ \cos^2\varphi^\circ\right],$$

$$\Delta X_{11}(t,\varepsilon)=\varepsilon^2\ \frac{4-a^2(t)}{4-a^2(s)}\ a(t)\cos^2\alpha(s,\varepsilon)\left[\frac{a^2(s)}{24}\cos^4\alpha(s,\varepsilon)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{3a^4(s)-16}{128}\cos^2\alpha(s,\varepsilon)-\frac{3a^4(s)+24a^2(s)-16}{128}\right]\right|_{s=0}^{s=t}+$$

$$+\varepsilon^2\int\limits_0^t\frac{4-a^2(t)}{4-a^2(s)}\ a(t)\ a^2(s)\cos^2\alpha(s,\varepsilon)\left[-\frac{\cos^4\alpha(s,\varepsilon)}{24}+\right.$$

$$\left.+\frac{3a^4(s)-24a^2(s)+16}{512}\cos^2\alpha(s,\varepsilon)-\frac{3a^4(s)-24a^2(s)-80}{512}\right]ds,$$

$$\Delta X_{12}=\varepsilon^2\sin\big(2\alpha(s,\varepsilon)\big)\left[\frac{a^4(s)}{32}\cos^6\alpha(s,\varepsilon)-\frac{5a^2(s)+12}{192}a^2(s)\cos^4\alpha(s,\varepsilon)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{5a^4(s)-24a^2(s)-96}{768}\cos^2\alpha(s,\varepsilon)-\frac{5a^4(s)-24a^2(s)+32}{512}\right]\right|_{s=0}^{s=t}+$$

$$+\varepsilon^2\int\limits_0^t a^2(s)\big(4-a^2(s)\big)\ \sin\big(2\alpha(s,\varepsilon)\big)\ \left[-\ \frac{a^2(s)}{64}\cos^6\alpha(s,\varepsilon)+\right.$$

$$\left.+\frac{a^2(s)+12}{384}\cos^4\alpha(s,\varepsilon)+\frac{5a^2(s)-12}{1536}\cos^2\alpha(s,\varepsilon)+\frac{5a^2(s)-12}{1024}\right]ds,$$

$$\Delta R_1(t,\varepsilon)=\Delta X_{11}(t,\varepsilon),$$
$$\Delta\Phi_1(t,\varepsilon)=\Delta X_{12}(t,\varepsilon).$$

Здесь a, α, C_0, C_1 — функции и постоянные (15.8). Из формул (19.2) следует, что на оси $t \geqslant 0$ функции ΔX_{1i}, ΔR_1, $\Delta\Phi_1$ имеют порядок $O(\varepsilon^2)$:

$$\begin{aligned} &\Delta X_1(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \qquad \Delta R_1(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \\ &\Delta\Phi_1(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \qquad\qquad t \geqslant 0, \qquad \varepsilon \to 0. \end{aligned} \tag{19.3}$$

При вычислении порядка малости функций (19.1), (19.2) использовались неравенства

$$|a(t)| \leqslant C, \qquad 4 - a^2(t) = \frac{4C_0e^{-t}}{1 + C_0e^{-t}}, \quad \widetilde{C}e^{-t} \leqslant |4 - a^2(t)| \leqslant Ce^{-t}, \quad t \geqslant 0.$$

Из (16.13), (19.2), (19.3) получим формулы для асимптотического решения первого порядка уравнения Ван дер Поля

$$W_1 = \overline{W}_1 + \Delta W_1, \qquad \overline{W}_1 \equiv \overline{R}_1 \cdot \cos\overline{\Phi}_1, \tag{19.4}$$

$$\Delta W_1(t,\varepsilon) \equiv (\overline{R}_1 + \Delta R_1)\cdot\cos(\overline{\Phi}_1 + \Delta\Phi_1) - \overline{R}_1\cdot\cos\overline{\Phi}_1 = O(\varepsilon^2),$$
$$t \geqslant 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Здесь W_1, $\overline{R}_1$, $\overline{\Phi}_1$, ΔR_1, $\Delta\Phi_1$ — функции (16.13), (19.2). Из (19.4) следует, что для функции $\overline{W}_1$ справедливы те же результаты, что для функции W_1 в п. 17.5.

19.2. Результаты, I

1. Асимптотическое решение первого порядка для задачи Ван дер Поля (15.1) представимо в виде

$$\overline{W}_1 = \overline{R}_1 \cdot \cos\overline{\Phi}_1, \tag{19.5}$$

где $\overline{R}_1 = \overline{R}_1(t,\varepsilon)$, $\overline{\Phi}_1 = \overline{\Phi}_1(t,\varepsilon)$ — функции (19.2), $t = \tau\varepsilon$. Асимптотики первого порядка W_1 и $\overline{W}_1$ связаны формулами (19.4).

2. Найдутся постоянные $T > 0$, $\varepsilon_* > 0$, C, не зависящие от τ, ε и такие, что на множестве

$$0 \leqslant \tau \leqslant T\varepsilon^{-2}, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$$

решение задачи Ван дер Поля (15.1) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$|w - \overline{W}_1| \leqslant \varepsilon^2(C\varepsilon^2\tau^2 + C), \tag{19.6}$$

где $\overline{W}_1$ — функция (19.5).

3. Для любых значений $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < 1$, найдутся постоянные $\varepsilon_* > 0$, C, не зависящие от τ, ε и такие, что на множестве

$$0 \leqslant \tau \leqslant T\varepsilon^{-1-\chi}, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$$

решение задачи Ван дер Поля (15.1) существует, единственно и удовлетворяют неравенству (19.6).

19.3. Периодическое решение уравнения Ван дер Поля

В этой книге не исследуются периодические решения дифференциальных уравнений, но так как уравнение Ван дер Поля интересно именно своим периодическим решением (*предельным циклом*) [15], то получим формулы для параметров, определяющих этот цикл.

Пусть $w = r\cos\varphi$ — периодическое решение уравнения Ван дер Поля (15.1) и T_t — его период по переменной t. Тогда $\dot{w} = r\ \sin\varphi$ — тоже периодическая функция с периодом T_t и для любого значения t справедливы равенства

$$r(t,\varepsilon)\cos\varphi(t,\varepsilon) = r(t+T_t,\varepsilon)\cos\varphi(t+T_t,\varepsilon),$$
$$r(t,\varepsilon)\sin\varphi(t,\varepsilon) = r(t+T_t,\varepsilon)\sin\varphi(t+T_t,\varepsilon).$$

Отсюда следуют уравнения

$$r(t,\varepsilon) = r(t+T_t,\varepsilon), \quad \varphi(t,\varepsilon) = 2k\pi + \varphi(t+T_t,\varepsilon), \quad k\in\mathbf{Z}. \tag{19.7}$$

По формулам (15.8)

$$\begin{aligned} r(t,\varepsilon) &= a(t) + x_1(t,\varepsilon) + \varepsilon g_1\big(r(t,\varepsilon),\varphi(t,\varepsilon)\big),\\ \varphi(t,\varepsilon) &= \alpha(t,\varepsilon) + x_2(t,\varepsilon) + \varepsilon g_2\big(r(t,\varepsilon),\varphi(t,\varepsilon)\big). \end{aligned} \tag{19.8}$$

Из результатов § 17 следует, что

$$x(t,\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0, \quad t\in[0,T_t].$$

Отсюда и из (19.7), (19.8) получаем

$$a(t) = a(t+T_t) + O(\varepsilon), \qquad \alpha(t,\varepsilon) = 2k\pi + \alpha(t+T_t,\varepsilon) + O(\varepsilon). \tag{19.9}$$

Подставляя в (19.9) вместо a, α их выражения (15.8) и решая уравнения относительно r°, T_t, получим

$$r^\circ = 0 \quad \text{или} \quad r^\circ = 2 + O(\varepsilon), \qquad T_t = 2\pi\varepsilon + O(\varepsilon^2), \qquad k = -1.$$

Так как значение $r^\circ = 0$ соответствует нулевому решению уравнения Ван дер Поля (15.1) $w = 0$, то при малых значениях $|\varepsilon|$ уравнение Ван дер Поля имеет одно периодическое решение, для которого

$$r^\circ = 2 + O(\varepsilon), \qquad T_t = 2\pi\varepsilon + O(\varepsilon^2), \qquad \varepsilon\to 0.$$

Подставим в (19.7) вместо r, φ их выражения (19.8). Подставим вместо x выражения, следующие из (15.8), (15.9),

$$\begin{aligned} x_1 &= \int_0^t q(t,s)\widetilde{F}_1\big(r(s,\varepsilon),\varphi(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big)\,ds,\\ x_2 &= \varepsilon\int_0^t h_2\big(r(s,\varepsilon),\varphi(s,\varepsilon)\big)\,ds, \end{aligned} \tag{19.10}$$

$$\widetilde{F}_1(r,\varphi,t,\varepsilon) \equiv F_0(r) - F_0\big(a(t)\big) - \\ - \frac{dF_0}{dr}\big(a(t)\big)\big[r - a(t) - \varepsilon g_1(r,\varphi)\big] + \varepsilon h_1(r,\varphi).$$

Получим

$$a(t) - a(t+T_t) = -\int\limits_0^t q(t,s)\,\widetilde{F}_1\big(r(s,\varepsilon),\varphi(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big)\,ds + \\ + \int\limits_0^{t+T_t} q(t+T_t,s)\,\widetilde{F}_1\big(r(s,\varepsilon),\varphi(s,\varepsilon),s,\varepsilon\big)\,ds, \qquad (19.11)$$

$$\alpha(t,\varepsilon) - \alpha(t+T_t,\varepsilon) = 2\pi + \varepsilon\int\limits_0^{T_t} h_2\big(r(s,\varepsilon),\varphi(s,\varepsilon)\big)\,ds.$$

Здесь использованы равенства

$$g_i\big(r(t,\varepsilon),\varphi(t,\varepsilon)\big) = g_i\big(r(t+T_t,\varepsilon),\varphi(t+T_t,\varepsilon)\big),$$
$$h_i\big(r(t,\varepsilon),\varphi(t,\varepsilon)\big) = h_i\big(r(t+T_t,\varepsilon),\varphi(t+T_t,\varepsilon)\big), \quad i = 1, 2,$$

следующие из периодичности функций $g_i(r,\varphi)$, $h_i(r,\varphi)$ по φ с периодом 2π (смотрите формулы (15.8), (15.9)).

Рассмотрим разности $a(t) - a(t+T_t)$, $\alpha(t,\varepsilon) - \alpha(t+T_t,\varepsilon)$. По формулам (15.8)

$$a(t) - a(t+T_t) = (r^\circ - 2)e^{-t}(1 - e^{-T_t}) + O\Big((r^\circ - 2)^2\Big), \\ \alpha(t,\varepsilon) - \alpha(t+T_t,\varepsilon) = \frac{T_t}{\varepsilon}. \qquad (19.12)$$

Уравнения (19.11) эквивалентны уравнениям

$$r^\circ = 2 + \Gamma_1(r^\circ, T_t, \varepsilon), \qquad T_t = 2\pi\varepsilon + \varepsilon\Gamma_2(r^\circ, T_t, \varepsilon),$$

$$\Gamma_1(r^\circ, T_t, \varepsilon) \equiv r^\circ - 2 + \frac{e^t}{1 - e^{-T_t}}\,\Big[a(t+T_t) - a(t) - \\ - \int\limits_0^t q(t,s)\cdot\widetilde{F}_1\Big(r(s,\varepsilon),\varphi(s,\varepsilon),s,\varepsilon\Big)\,ds + \qquad (19.13) \\ + \int\limits_0^{t+T_t} q(t+T_t,s)\cdot\widetilde{F}_1\Big(r(s,\varepsilon),\varphi(s,\varepsilon),s,\varepsilon\Big)\,ds\Big],$$

$$\Gamma_2(r^\circ, T_t, \varepsilon) \equiv \varepsilon \int\limits_0^{T_t} h_2\Big(r(s,\varepsilon), \varphi(s,\varepsilon)\Big)\, ds.$$

Получили уравнения для r°, T_t. Из (19.12) следует, что функции Γ_1, Γ_2 обращаются в ноль при $\varepsilon = 0$. Отметим, что хотя в первое уравнение (19.13) входит явно переменная t, параметры r°, T_t от t не зависят. Это следует из периодичности рассматриваемого решения уравнения Ван дер Поля.

Чтобы получить формулы для искомых параметров, рассмотрим уравнения с двумя малыми параметрами ε, μ

$$\xi_1 = 2 + \widehat{\Gamma}_1(\xi, \varepsilon, \mu), \qquad \xi_2 = 2\pi\mu + \mu\widehat{\Gamma}_2(\xi, \varepsilon, \mu), \qquad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad (19.14)$$

где $\widehat{\Gamma}_1(\xi,\varepsilon,\mu)$, $\widehat{\Gamma}_2(\xi,\varepsilon,\mu)$ получаются заменой в $\Gamma_1(r^\circ, T_t, \varepsilon)$, $\Gamma_2(r^\circ, T_t, \varepsilon)$ функций $r(t,\varepsilon)$, $\varphi(t,\varepsilon)$ на $\rho(t,\varepsilon,\mu)$, $\psi(t,\varepsilon,\mu)$ и параметров r°, T_t на ξ_1, ξ_2.

Решение системы (19.14) зависит от двух малых параметров: $\xi = \xi(\varepsilon,\mu)$. Будем искать его в виде рядов

$$\xi(\varepsilon,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^{(k)}(\mu)\, \varepsilon^k. \quad (19.15)$$

Подставим в (19.14) вместо ξ_1, ξ_2 ряды (19.15), вместо ρ, ψ ряды (16.2), разложим левые и правые части уравнений (19.14) в ряды по степеням ε и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим формулы для коэффициентов $\xi^{(k)}(\mu)$:

$$\begin{aligned}
&\xi_1^{(0)}(\mu) = 2, \quad \xi_2^{(0)}(\mu) = 2\pi\mu, \\
&\xi_1^{(k)}(\mu) = \left[\widehat{\Gamma}_1\left(\sum_{j=0}^{k-1} \xi^{(j)}(\mu)\varepsilon^j, \varepsilon, \mu\right)\right]^{(k)}, \\
&\xi_2^{(k)}(\mu) = \mu\left[\widehat{\Gamma}_2\left(\sum_{j=0}^{k-1} \xi^{(j)}(\mu)\varepsilon^j, \varepsilon, \mu\right)\right]^{(k)}, \quad k \geqslant 1.
\end{aligned} \quad (19.16)$$

Из (19.13), (19.14) следуют равенства

$$r^\circ = \xi_1(\varepsilon,\varepsilon), \quad T_t = \xi_2(\varepsilon,\varepsilon).$$

Отсюда и из (19.15), (19.16) получим формулы для r°, T_t, T_τ, где T_τ — период периодического решения уравнения Ван дер Поля (15.1) по переменной τ, $T_\tau = T_t/\varepsilon$.

$$r^\circ = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_1^{(k)}(\varepsilon)\, \varepsilon^k, \quad T_t = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_2^{(k)}(\varepsilon)\, \varepsilon^k, \quad T_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_2^{(k)}(\varepsilon)\, \varepsilon^{k-1}, \quad (19.17)$$

$$\xi_1^{(0)}(\varepsilon) = 2, \quad \xi_2^{(0)}(\varepsilon) = 2\pi\varepsilon,$$

$$\xi_1^{(k)}(\mu) = \left[\widehat{\Gamma}_{1k}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \xi^{(j)}(\mu)\varepsilon^j, \varepsilon, \mu\right)\right]^{(k)},$$

$$\xi_2^{(k)}(\mu) = \mu\left[\widehat{\Gamma}_{2k}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \xi^{(j)}(\mu)\,\varepsilon^j, \varepsilon, \mu\right)\right]^{(k)}, \quad k \geqslant 1,$$

$$\widehat{\Gamma}_{1k}(\xi,\varepsilon,\mu) \equiv \frac{e^t}{1-e^{-\xi_2}}\Bigg[\widehat{a}(t+\xi_2,\xi) - \widehat{a}(t,\xi) -$$

$$- \int_0^t \widehat{q}(t,s,\xi)\cdot\widehat{F}_1\left(\sum_{j=0}^{k-1}\widehat{\rho}^{(j)}(s,\xi,\mu)\,\varepsilon^j, \sum_{j=0}^{k-1}\widehat{\psi}^{(j)}(s,\xi,\mu)\,\varepsilon^j, s, \varepsilon\right)ds +$$

$$+ \int_0^{t+\xi_2} \widehat{q}(t+\xi_2,s,\xi)\cdot\widehat{F}_1\left(\sum_{j=0}^{k-1}\widehat{\rho}^{(j)}(s,\xi,\mu)\,\varepsilon^j, \sum_{j=0}^{k-1}\widehat{\psi}^{(j)}(s,\xi,\mu)\,\varepsilon^j, s, \varepsilon\right)ds\Bigg].$$

$$\widehat{\Gamma}_{2k}(\xi,\varepsilon,\mu) \equiv \varepsilon \int_0^{\xi_2} h_2\left(\sum_{j=0}^{k-1}\widehat{\rho}^{(j)}(s,\xi,\mu)\,\varepsilon^j, \sum_{j=0}^{k-1}\widehat{\psi}^{(j)}(s,\xi,\mu)\,\varepsilon^j\right)ds,$$

$$\widehat{a}(t,\xi) \equiv a(t)\big|_{r^\circ=\xi_1}, \qquad \widehat{q}(t,s,\xi) \equiv q(t,s)\big|_{r^\circ=\xi_1},$$

$$\widehat{F}_1(r,\varphi,t,\xi,\varepsilon) \equiv \widetilde{F}_1(r,\varphi,t,\varepsilon)\big|_{r^\circ=\xi_1},$$

$$\widehat{\rho}^{(k)}(t,\xi,\mu) \equiv \rho^{(k)}(t,\mu)\big|_{r^\circ=\xi_1}, \qquad \widehat{\psi}^{(k)}(t,\xi,\mu) \equiv \psi^{(k)}(t,\mu)\big|_{r^\circ=\xi_1}.$$

Здесь a, h_2, q, $\widetilde{F}_1$, $\rho^{(k)}$, $\psi^{(k)}$ — функции (15.8), (15.9), (16.5), (19.10), (16.3), (16.4).

Получили, что периодическое решение уравнения Ван дер Поля определяется параметрами r°, φ°, где φ° — произвольная постоянная, не зависящая от t, ε, а r° и период вычисляются по формулам (19.17).

Коэффициенты $\xi^{(k)}$ в (19.17) вычисляются последовательно для $k = 0, 1, \ldots$ При этом для $\xi^{(k)}$ нужно знать асимптотическое решение k-го порядка уравнения Ван дер Поля. Используя формулы (16. для асимптотического решения первого порядка, из (19.17) получим

$$r^\circ = 2 + O(\varepsilon^2), \quad T_t = 2\pi\varepsilon + O(\varepsilon^3), \quad T_\tau = 2\pi + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0. \quad (19.1$$

Чтобы построить большее число значащих членов для r° и период нужно рассмотреть асимптотическое решение уравнения Ван дер Поля порядка, большего единицы. Здесь это не сделано.

Замечание 19.1. На стр. 14 изображена фазовая плоскость для задачи Ван дер Поля (15.1) при $\varepsilon = 0{,}2$.

Замечание 19.2. В этой книге нет доказательства существования периодического решения уравнения Ван дер Поля, не исследуется устойчивость периодического решения, не доказывается сходимость рядов (19.17) и т. д. Эти вопросы выходят за рамки рассматриваемой в книге теории дифференциальных уравнений.

19.4. Результаты, II

Периодическое решение уравнения Ван дер Поля (15.1) определяется параметрами r°, φ°, где φ° — произвольная постоянная, а r° и период вычисляются по формулам (19.17). Справедливо асимптотическое представление (19.18).

§ 20. Выводы главы 2

В главе 2 исследуется *задача Ван дер Поля* (15.1).

В § 15 показано, что задача Ван дер Поля эквивалентна регулярно возмущенной задаче Коши (15.3) на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant T$ и эквивалентна почти регулярной задаче Коши (15.9) на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant T/\varepsilon$.

В § 16 получено представление решения задачи Ван дер Поля через ряды и построено асимптотическое решение. Доказательство сходимости рядов и оценки точности асимптотического решения даны в § 17.

В § 18 предложен алгоритм, позволяющий при заданном значении малого параметра оценить численно: точность асимптотических решений нулевого и первого порядков, интервал времени существования решения. Результаты численных расчетов представлены в табл. 2.

В § 19 построено асимптотическое решение первого порядка, более простое, чем в § 16; получены формулы для периодического решения уравнения Ван дер Поля.

§ 21. Выводы части 1

В части 1 рассмотрена *почти регулярная задача Коши* [30]. Так названа задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром, в которую сингулярность входит через ограниченную функцию $f(t, \varepsilon)$. Значимость такой задачи можно оценить по тому факту, что некоторые задачи, решаемые методом осреднения, можно привести к почти регулярной задаче Коши и решить методами главы 1. Так решена *задача Ван дер Поля* [31] в главе 2.

В главе 1 дано определение почти регулярной задачи Коши и построен ряд, который сходится к решению задачи или является асимптотикой решения на отрезке, на всей полуоси $t \geqslant 0$ и на асимптотически больших интервалах времени. Доказаны теоремы, позволяющие оценить численно: точность асимптотического решения, интервал времени существования решения, значения малого параметра.

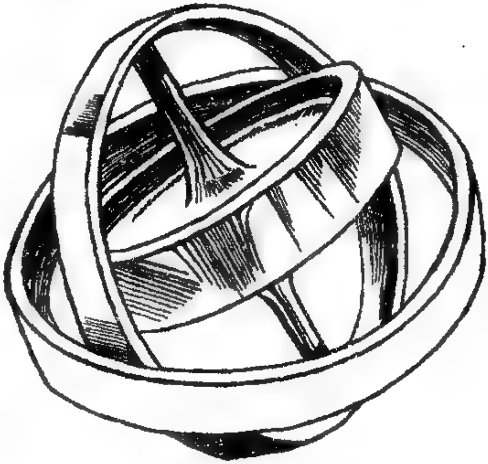
Если нет зависимости от функции f, то почти регулярная задача Коши становится *регулярно возмущенной задачей Коши*, которую исследовал

А. Пуанкаре [39]. Для этой задачи предложенный метод решения совпадает с методом малого параметра Пуанкаре. Ряд Пуанкаре сходится к точному решению или является асимптотикой решения на отрезке [39], на всей полуоси $t \geqslant 0$ и на асимптотически больших интервалах времени [27].

Даны оценки радиуса сходимости ряда Пуанкаре, оценки интервала времени, на котором ряд Пуанкаре сходится при фиксированном значении малого параметра, оценки нормы матрицы Коши. Дополнительные оценки нормы матрицы Коши даны в § 60 части 2.

Часть 2

Задача Тихонова



Гироскоп

в кардановом подвесе.

Глава 3

Метод пограничных функций

§ 22. Определение задачи Тихонова

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= F_1(x,t,\mu), \qquad x_1|_{t=0} = x_1^\circ(\mu), \\ \mu^{K_i}\frac{dx_i}{dt} &= F_i(x,t,\mu), \qquad x_i|_{t=0} = x_i^\circ(\mu), \quad i=\overline{2,m}, \end{aligned} \tag{22.1}$$

где x_i, F_i, x_i° — N_i-мерные векторы; $x \equiv (x_1, \ldots, x_m)$; $N = N_1 + \ldots + N_m$; t — независимая переменная (время); $\mu > 0$ — малый параметр; K_i — целые числа; $0 = K_1 < K_2 < \ldots < K_m$.

Если положить $\mu = 0$, то порядок системы дифференциальных уравнений (22.1) сохранится при $m = 1$ и понизится при $m \geqslant 2$. Поэтому при $m \geqslant 2$ и $\mu = 0$ решение дифференциальных уравнений (22.1) не может, вообще говоря, удовлетворить всем начальным условиям (22.1).

Введем обозначения. $D_x = D_1 \times \ldots \times D_m$. $D_i \subset \mathbb{R}^{N_i}$ — окрестность точки $x_i = 0$. D_t — множество в пространстве $\mathbb{R} \ni t$. T, $\bar\mu$ — положительные числа.

Определение 22.1. Задача (22.1) называется *сингулярно возмущенной задачей Коши*, если: 1) функции $F_i(x,t,\mu)$, $i=\overline{1,m}$, определены на прямом произведении области D_x и отрезков $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant \mu \leqslant \bar\mu$; 2) функции $x_i^\circ(\mu)$, $i = \overline{1,m}$, определены на отрезке $0 \leqslant \mu \leqslant \bar\mu$ и имеют значения в области D_x; 3) функции $F_j(x,t,0)$, $j=\overline{2,m}$, не равны тождественно нулю; 4) $m \geqslant 2$.

Определение 22.2. Задача

$$\frac{d\bar x_1}{dt} = F_1(\bar x, t, 0), \quad \bar x_1(0) = x_1^\circ(0), \quad F_i(\bar x, t, 0) = 0, \quad i=\overline{2,m} \tag{22.2}$$

называется *вырожденной задачей*.

Определение 22.3. Задача (22.1) называется *задачей Тихонова на множестве* $D_{t\mu} \ni (t,\mu)$, если найдется такое решение $\bar x(t)$ задачи (22.2), что для любых значений $(t_*, \mu_*) \in D_{t\mu}$, $t_* > 0$ решение задачи (22.1) существует при $0 \leqslant t \leqslant t_*$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$ и

$$\lim_{\mu\to 0+0} x(t_*, \mu) = \bar x(t_*).$$

Чтобы сингулярно возмущенная задача Коши являлась задачей Тихонова, должны выполняться достаточно жесткие условия (смотрите § 26). Тем не менее, существует большое число прикладных задач, удовлетворяющих этим условиям [11, 37, 42]. Эти задачи отличает наличие быстро затухающих составляющих, так что через малый промежуток времени решение достигает окрестности кривой

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = F_1(\bar{x}, t, 0), \quad \bar{x}_1(0) = x_1^\circ(0),$$

лежащей на многообразии

$$F_2(\bar{x}, t, 0) = 0, \quad \ldots, \quad F_m(\bar{x}, t, 0) = 0.$$

Такие задачи исследовал А. Н. Тихонов [43].

§ 23. Построение асимптотического решения методом пограничных функций

Асимптотическое решение задачи (22.1) будем строить в виде суммы

$$x(t, \mu) = \sum_{j=1}^{m} y_j(\tau_j, \mu), \quad \tau_j = t\mu^{-K_j}, \quad j = \overline{1, m} \quad (\tau_1 = t, \quad K_1 = 0).$$

Переменные τ_2, ..., τ_m называются *быстрыми временами*; y_2, ..., y_m называются *пограничными функциями*. При выполнении условий, сформулированных в § 26, пограничные функции удовлетворяют неравенствам

$$\|y_j(\tau_j, 0)\| \leqslant C \exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\},$$

где C, κ_{0j} — постоянные. Отсюда следует, что функция y_j при $j \geqslant 2$, $\mu \to 0$ вносит существенный вклад в асимптотику решения задачи Тихонова на интервале времени порядка μ^{K_j}. Функция $y_1(t, \mu)$ является основным членом асимптотики на всем интервале времени за исключением *пограничного слоя*, примыкающего к точке $t = 0$ и стремящегося к нулю при $\mu \to 0$.

Разложим y_j в ряд по степеням μ:

$$y_j(\tau_j, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} y_j^{(k)}(\tau_j)\mu^k. \tag{23.1}$$

Тогда асимптотическое решение задачи (22.1) примет вид

$$\boxed{x(t, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} y_j^{(k)}(\tau_j)\mu^k.} \tag{23.2}$$

Коэффициенты ряда (23.2) будем находить, используя уравнения

$$\mu^{K_i}\frac{dy_{1i}}{d\tau_1}=F_i(y_1,\tau_1,\mu),\quad i=\overline{1,m};$$

$$\mu^{K_i}\frac{dy_{ji}}{d\tau_j}=\mu^{K_j}\left[F_i\left(\sum_{l=1}^{j}y_l,\tau_j\mu^{K_j},\mu\right)-F_i\left(\sum_{l=1}^{j-1}y_l,\tau_j\mu^{K_j},\mu\right)\right],\qquad(23.3)$$

$$i=\overline{1,m},\quad j=\overline{2,m};$$

$$\lim_{\tau_j\to\infty}y_{ji}(\tau_j,\mu)=0,\quad i=\overline{1,j-1},\quad j=\overline{2,m};\quad \sum_{j=1}^{m}y_j(0,\mu)=x^\circ(\mu).$$

Здесь $y_j=(y_{j1},\ldots,y_{jm})$.

Опишем построение уравнений для коэффициентов ряда (23.2), предполагая, что все операции имеют смысл.

- В уравнения (23.3) подставляем ряды (23.1).
- Разлагаем левые и правые части уравнений в ряды по степеням μ так, чтобы в уравнениях, содержащих производную $dy_{ji}/d\tau_j$ или $\lim y_{ji}(\tau_j,\mu)$, коэффициенты разложения зависели только от переменной τ_j. Для этого при разложении пользуемся равенством
$$\tau_i=\tau_j\mu^{K_j-K_i},\quad i=\overline{1,j-1},\quad j=\overline{2,m}.$$
- Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях μ. Получаем уравнения для $y_j^{(k)}(\tau_j)$.

После подстановки рядов (23.1) в уравнения (23.3) получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{dy_{1i}^{(k)}(\tau_1)}{d\tau_1}\mu^{K_i+k}=F_i\left(\sum_{q=0}^{\infty}y_1^{(q)}(\tau_1)\mu^q,\tau_1,\mu\right),\quad i=\overline{1,m};$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{dy_{ji}^{(k)}(\tau_j)}{d\tau_j}\mu^{K_i+k}=\mu^{K_j}\left[F_i\left(\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{j}y_l^{(q)}(\tau_j\mu^{K_j-K_l})\mu^q,\tau_j\mu^{K_j},\mu\right)-\right.$$

$$\left.-F_i\left(\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{j-1}y_l^{(q)}(\tau_j\mu^{K_j-K_l})\mu^q,\tau_j\mu^{K_j},\mu\right)\right],\qquad(23.4)$$

$$i=\overline{1,m},\quad j=\overline{2,m};$$

$$\lim_{\tau_j\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}y_{ji}^{(k)}(\tau_j)\mu^k=0,\quad i=\overline{1,j-1},\quad j=\overline{2,m};$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}y_j^{(k)}(0)\mu^k=x^\circ(\mu).$$

Здесь $y_j^{(k)} = \left(y_{j1}^{(k)}, \dots, y_{jm}^{(k)}\right)$. Разложив левые и правые части уравнений в ряд по степеням μ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим:

$\boxed{k=0}$

$$\frac{dy_{11}^{(0)}}{d\tau_1} = F_1\left(y_1^{(0)}, \tau_1, 0\right), \quad 0 = F_i(y_1^{(0)}, \tau_1, 0), \quad i = \overline{2,m};$$

$$\frac{dy_{ji}^{(0)}}{d\tau_j} = 0, \quad i = \overline{1, j-1}, \quad j = \overline{2,m};$$

$$\frac{dy_{jj}^{(0)}}{d\tau_j} = F_j(Y_j, 0, 0) - F_j(Y_{j-1}(0), 0, 0), \quad j = \overline{2,m};$$

$$0 = F_i(Y_j, 0, 0) - F_i(Y_{j-1}(0), 0, 0), \quad i = \overline{j+1, m}, \quad j = \overline{2, m-1}, \quad m \geqslant 3;$$

$$\lim_{\tau_j \to \infty} y_{ji}^{(0)}(\tau_j) = 0, \quad i = \overline{1, j-1}, \quad j = \overline{2,m};$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j^{(0)}(0) = x^\circ(0);$$

$$Y_j \equiv \sum_{l=1}^{j-1} y_l^{(0)}(0) + y_j^{(0)}, \quad Y_{j-1}(0) = \sum_{l=1}^{j-1} y_l^{(0)}(0), \quad j = \overline{2,m}. \tag{23}$$

$\boxed{k=1}$

$$\frac{dy_{11}^{(1)}}{d\tau_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x}\left(y_1^{(0)}(\tau_1), \tau_1, 0\right) y_1^{(1)} + \frac{\partial F_1}{\partial \mu}\left(y_1^{(0)}(\tau_1), \tau_1, 0\right);$$

$$\frac{dy_{1i}^{(0)}}{d\tau_1}\langle K_i{=}1\rangle = \frac{\partial F_i}{\partial x}\left(y_1^{(0)}(\tau_1), \tau_1, 0\right) y_1^{(1)} + \frac{\partial F_i}{\partial \mu}\left(y_1^{(0)}(\tau_1), \tau_1, 0\right), \quad i = \overline{2,m}.$$

$$\frac{dy_{ji}^{(1)}}{d\tau_j} = \left[F_i(Y_j(\tau_j), 0, 0) - F_i(Y_{j-1}(0), 0, 0)\right]\langle K_j{=}K_i{+}1\rangle,$$

$$i = \overline{1, j-1}, \quad j = \overline{2,m};$$

$$\frac{dy_{jj}^{(1)}}{d\tau_j} = F_{j*}(y_j^{(1)}, \tau_j), \quad j = \overline{2,m};$$

$$\frac{dy_{ji}^{(0)}(\tau_j)}{d\tau_j}\langle K_i{=}K_j{+}1\rangle = F_{i*}(y_j^{(1)}, \tau_j), \quad i = \overline{j+1, m}, \quad j = \overline{2, m-1}, \quad m \geqslant 3;$$

$$\lim_{\tau_j \to \infty} y_{ji}^{(1)}(\tau_j) = 0, \quad i = \overline{1, j-1}, \quad j = \overline{2,m};$$

$$\sum_{j-1}^{m} y_j^{(1)}(0) = \frac{dx^\circ}{d\mu}(0);$$

$$\begin{aligned}
F_{i*}(y_j^{(1)}, \tau_j) \equiv \frac{\partial F_i}{\partial x}\Big(Y_j(\tau_j), 0, 0\Big) y_j^{(1)} + \\
+ \left[\frac{\partial F_i}{\partial x}\Big(Y_j(\tau_j), 0, 0\Big) - \frac{\partial F_i}{\partial x}(Y_{j-1}(0), 0, 0)\right] \times \\
\times \left[\sum_{l=1}^{j-1} y_l^{(1)}(0) + \frac{dy_{j-1}^{(0)}(0)}{d\tau_{j-1}} \tau_{j\langle K_j = K_{j-1}+1\rangle}\right] + \\
+ \left[\frac{\partial F_i}{\partial t}\Big(Y_j(\tau_j), 0, 0\Big) - \frac{\partial F_i}{\partial t}\Big(Y_{j-1}(0), 0, 0\Big)\right] \tau_{j\langle K_j=1\rangle} + \\
+ \left[\frac{\partial F_i}{\partial \mu}\Big(Y_j(\tau_j), 0, 0\Big) - \frac{\partial F_i}{\partial \mu}\Big(Y_{j-1}(0), 0, 0\Big)\right], \\
i = \overline{j, m}, \quad j = \overline{2, m};
\end{aligned}$$

$$Y_j(\tau_j) = \sum_{l=1}^{j-1} y_l^{(0)}(0) + y_j^{(0)}(\tau_j), \quad j = \overline{2, m}.$$

Здесь и далее условие в угловых скобках $\langle\ \rangle$ при слагаемом означает, что слагаемое добавляется при выполнении этого условия. Если условие не выполняется, то слагаемое нужно положить равным нулю.

Производная вектора F по вектору x является матрицей Якоби, составленной из частных производных компонент вектора F по компонентам вектора x.

Из уравнений (23.5) следует, что

$$y_1^{(0)}(\tau_1) = \bar{x}(t),$$

где $\bar{x}(t)$ — решение вырожденной задачи (22.2); при $k \geqslant 1$ коэффициенты ряда (23.2) находятся из линейных уравнений (алгебраических или дифференциальных, смотрите § 24).

Замечание 23.1. В § 28 сформулированы теоремы, из которых следует, что при выполнении соответствующих условий ряд (23.2) является асимптотическим решением задачи (22.1). При $m = 2$, $K_2 = 1$ это решение совпадает с асимптотикой Васильевой — Иманалиева [8, 11]. При $m > 2$ предложенная процедура построения ряда проще соответствующей процедуры в [9], так как асимптотический ряд (23.2) — сумма m рядов, а асимптотика в [9] — сумма $(2m - 1)$ рядов.

§ 24. Порядок вычисления коэффициентов асимптотики

Коэффициенты $y_j^{(k)} = (y_{j1}^{(k)}, \dots, y_{jm}^{(k)})$ ряда (23.2) определяются последовательно для $k = 0, 1, \dots$. Опишем порядок вычисления коэффициентов при фиксированном значении k.

24.1. Вычисление коэффициентов асимптотики, I

При $i = \overline{1, j-1}$, $j = \overline{2, m}$ коэффициенты $y_{ji}^{(k)}$ находятся как решение дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_{ji}^{(k)}}{d\tau_j} = f_{kji}(\tau_j)$$

с известной правой частью и с условием на бесконечности

$$\lim_{\tau_j \to \infty} y_{ji}^{(k)}(\tau_j) = 0.$$

Решение имеет вид

$$y_{ji}^{(k)} = \varphi_{kji}(\tau_j) \equiv -\int_{\tau_j}^{\infty} f_{kji}(\sigma)\,d\sigma, \quad i = \overline{1, j-1}, \quad j = \overline{2, m}. \tag{24.1}$$

Здесь

$$f_{0ji}(\tau_j) = 0, \quad \varphi_{0ji}(\tau_j) = 0.$$

Поэтому

$$y_{ji}^{(0)} = 0, \quad i = \overline{1, j-1}, \quad j = \overline{2, m}. \tag{24.2}$$

При $k \geqslant 1$ функции f_{kji} вычисляются через $y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}, \dots, y_1^{(k-1)}, \dots$ $y_m^{(k-1)}$ по формулам

$$f_{kji}(\tau_j) \equiv \Bigg[\mu^{K_j - K_i} F_i\Bigg(\sum_{q=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{j} y_l^{(q)}(\tau_j \mu^{K_j - K_l})\mu^q, \tau_j\mu^{K_j}, \mu\Bigg) -$$
$$- \mu^{K_j - K_i} F_i\Bigg(\sum_{q=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{j-1} y_l^{(q)}(\tau_j \mu^{K_j - K_l})\mu^q, \tau_j\mu^{K_j}, \mu\Bigg)\Bigg]^{(k)}. \tag{24.3}$$

Здесь и далее $[\ ]^{(k)}$ означает коэффициент при μ^k в разложении функции стоящей в квадратных скобках, в ряд по степеням μ.

Результаты 24.1. Функции $y_{ji}^{(k)}$, $i = \overline{1, j-1}$, $j = \overline{2, m}$, находятся по формулам (24.2) при $k = 0$ и по формулам (24.1), (24.3) при $k \geqslant 1$.

24.2. Вычисление коэффициентов асимптотики, II

При $i = \overline{j, m}$, $j = \overline{1, m}$ функции $y_{ji}^{(k)}$ вычисляются последовательно для $j = 1, \ldots, m$. Опишем порядок вычисления при фиксированном значении j.

а) При $j < m$ коэффициенты $y_{jj+1}^{(k)}, \ldots, y_{jm}^{(k)}$ выражаются через $y_{jj}^{(k)}$ и τ_j:

$$y_{ji}^{(k)} = \widetilde{\varphi}_{kji}(y_{jj}^{(k)}, \tau_j), \quad i = \overline{j+1, m}. \tag{24.4}$$

Для этого используются уравнения

$\boxed{k = 0,\ j \leqslant m-1}$

$$\begin{gathered} F_i(Y_j, t_j, 0) - F_i(Y_{j-1}(0), 0, 0)_{(j>1)} = 0, \quad i = \overline{j+1, m}; \\ Y_j = \sum_{l=1}^{j-1} y_l^{(0)}(0)_{(j>1)} + y_j^{(0)}, \quad t_j = \tau_{1(j=1)}, \quad y_1^{(0)} = (y_{11}^{(0)}, \ldots, y_{1m}^{(0)}); \\ y_j^{(0)} = (0, \ldots, 0, y_{jj}^{(0)}, y_{jj+1}^{(0)}, \ldots, y_{jm}^{(0)}) \quad \text{при} \quad j > 1. \end{gathered} \tag{24.5}$$

$\boxed{k \geqslant 1,\ j \leqslant m-1}$

$$\begin{gathered} \frac{\partial F_i}{\partial x}(Y_j(\tau_j), t_j, 0) y_j^{(k)} = f_{kji}(\tau_j), \quad i = \overline{j+1, m}, \\ f_{kji}(\tau_j) \equiv \left[\frac{\partial F_i}{\partial x}(Y_{j-1}(0), 0, 0) - \frac{\partial F_i}{\partial x}(Y_j(\tau_j), 0, 0)\right] \sum_{l=1}^{j-1} y_l^{(k)}(0)_{(j>1)} + \\ + \left[\sum_{q=0}^{k-1} \frac{dy_{ji}^{(q)}(\tau_j)}{d\tau_j} \mu^{K_i - K_j + q} - F_i\left(\sum_{q=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{j} y_l^{(q)}(\tau_j \mu^{K_j - K_l})\mu^q, \tau_j \mu^{K_j}, \mu\right) + \right. \\ \left. + F_i\left(\sum_{q=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{j-1} y_l^{(q)}(\tau_j \mu^{K_j - K_l})\mu^q, \tau_j \mu^{K_j}, \mu\right)_{(j>1)}\right]^{(k)}, \\ Y_j(\tau_j) = \sum_{l=1}^{j-1} y_l^{(0)}(0)_{(j>1)} + y_j^{(0)}(\tau_j), \quad y_1^{(k)} = (y_{11}^{(k)}, \ldots, y_{1m}^{(k)}); \\ y_j^{(k)} = (\varphi_{kj1}(\tau_j), \ldots, \varphi_{kjj-1}(\tau_j), y_{jj}^{(k)}, \ldots, y_{jm}^{(k)}) \quad \text{при} \quad j > 1. \end{gathered} \tag{24.6}$$

Из написанного видно, что при $k \geqslant 1$ уравнения для $y_{jj+1}^{(k)}, \ldots, y_{jm}^{(k)}$ являются линейными алгебраическими. Их решение имеет вид

$\boxed{k \geqslant 1,\ j \leqslant m-1}$

$$\begin{pmatrix} y^{(k)}_{jj+1} \\ \vdots \\ y^{(k)}_{jm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_{kjj+1} \\ \vdots \\ \widetilde{\varphi}_{kjm} \end{pmatrix} (y^{(k)}_{jj}, \tau_j) \equiv$$

$$\equiv H_j\Big(Y_j(\tau_j), t_j, 0\Big)\Bigg[-\frac{\partial(F_{j+1}\ldots F_m)}{\partial x_j}\Big(Y_j(\tau_j), t_j, 0\Big) y^{(k)}_{jj} - \tag{24.7}$$

$$-\frac{\partial(F_{j+1}\ldots F_m)}{\partial(x_1\ldots x_{j-1})}\Big(Y_j(\tau_j), t_j, 0\Big)\cdot \begin{pmatrix} \varphi_{kj1} \\ \vdots \\ \varphi_{kjj-1} \end{pmatrix}(\tau_j)\,{}_{(j>1)} + \begin{pmatrix} f_{kjj+1} \\ \vdots \\ f_{kjm} \end{pmatrix}(\tau_j)\Bigg].$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\frac{\partial(F_j \ldots F_m)}{\partial(x_l \ldots x_r)} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_j}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_j}{\partial x_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_r} \end{pmatrix} \text{ — матрица Якоби,}$$

$$H_j(x, t, \mu) \equiv \left[\frac{\partial(F_{j+1} \ldots F_m)}{\partial(x_{j+1} \ldots x_m)}\right]^{-1}(x, t, \mu), \quad j = \overline{1, m-1}.$$

б) Далее находится коэффициент

$$y^{(k)}_{jj} = \varphi_{kjj}(\tau_j). \tag{24.8}$$

Для этого функции (24.4), (24.7) подставляются в дифференциальное уравнение для $y^{(k)}_{jj}$ и в начальное условие. Получается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$\boxed{k = 0}$

$$\frac{dy^{(0)}_{jj}}{d\tau_j} = \Phi_j\Big(y^{(0)}_{jj}, \tau_j\Big), \quad y^{(0)}_{jj}(0) = x^\circ_j(0) - \sum_{l=1}^{j-1}\varphi_{0lj}(0)\,{}_{(j>1)}, \quad j = \overline{1, m};$$

$$\Phi_j\Big(y^{(0)}_{jj}, \tau_j\Big) \equiv F_j\Big(\sum_{l=1}^{j-1} y^{(0)}_l(0)\,{}_{(j>1)} + \widetilde{y}^{(0)}_j, t_j, 0\Big) - F_j\Big(Y_{j-1}(0), 0, 0\Big)\,{}_{(j>1)}, \tag{24.9}$$

$$\widetilde{y}^{(0)}_1 = \Big(y^{(0)}_{11},\ \widetilde{\varphi}_{012}(y^{(0)}_{11}, \tau_1),\ \ldots,\ \widetilde{\varphi}_{01m}(y^{(0)}_{11}, \tau_1)\Big),$$

$$\widetilde{y}^{(0)}_j = \Big(0, \ldots, 0,\ y^{(0)}_{jj},\ \widetilde{\varphi}_{0jj+1}(y^{(0)}_{jj}, \tau_j),\ \ldots,\ \widetilde{\varphi}_{0jm}(y^{(0)}_{jj}, \tau_j)\Big), \quad 1 < j < m,$$

$$\widetilde{y}^{(0)}_m = (0, \ldots, 0, y^{(0)}_{mm});$$

$\boxed{k \geqslant 1}$

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy_{jj}^{(k)}}{d\tau_j}=\widetilde{A}_j(\tau_j)y_{jj}^{(k)}+f_{kjj}(\tau_j),\\
&y_{jj}^{(k)}(0)=\left[x_j^\circ(\mu)\right]^{(k)}-\sum_{l=\overline{1,m},\ l\neq j}\varphi_{klj}(0),\\
&\widetilde{A}_j(\tau_j)\equiv\left[\frac{\partial F_j}{\partial x_j}-\frac{\partial F_j}{\partial(x_{j+1}\ldots x_m)}H_j\frac{\partial(F_{j+1}\ldots F_m)}{\partial x_j}{}_{(j<m)}\right]\Big(Y_j(\tau_j),t_j,0\Big),\\
&f_{kjj}(\tau_j)\equiv\left[\frac{\partial F_j}{\partial(x_1\ldots x_{j-1})}-\frac{\partial F_j}{\partial(x_{j+1}\ldots x_m)}H_j\frac{\partial(F_{j+1}\ldots F_m)}{\partial(x_1\ldots x_j)}{}_{(j<m)}\right]\\
&\big(Y_j(\tau_j),0,0\big)\begin{pmatrix}\varphi_{kj1}\\ \vdots\\ \varphi_{kjj-1}\end{pmatrix}(\tau_j){}_{(j>1)}+\\
&\qquad+\left[\frac{\partial F_j}{\partial(x_{j+1}\ldots x_m)}H_j\right]\big(Y_j(\tau_j),t_j,0\big)\cdot\begin{pmatrix}f_{kjj+1}\\ \vdots\\ f_{kjm}\end{pmatrix}(\tau_j){}_{(j<m)}+\\
&\qquad+\left[\frac{\partial F_j}{\partial x}\big(Y_j(\tau_j),0,0\big)-\frac{\partial F_j}{\partial x}\big(Y_{j-1}(0),0,0\big)\right]\sum_{l=1}^{j-1}y_l^{(k)}(0){}_{(j>1)}+\\
&\qquad+\Bigg[F_j\left(\sum_{q=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{j}y_l^{(q)}(\tau_j\mu^{K_j-K_l})\mu^q,\tau_j\mu^{K_j},\mu\right)-\\
&\qquad-F_j\left(\sum_{q=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{j-1}y_l^{(q)}(\tau_j\mu^{K_j-K_l})\mu^q,\tau_j\mu^{K_j},\mu\right){}_{(j>1)}\Bigg]^{(k)}.
\end{aligned}
\tag{24.10}
$$

Отсюда следует, что при $k \geqslant 1$ функции $y_{jj}^{(k)}$ являются решениями линейной задачи Коши.

Обозначим $\widetilde{U}_j(\tau_j,\sigma_j)$ матрицу Коши системы

$$\frac{dr_j}{d\tau_j}=\widetilde{A}_j(\tau_j)r_j. \tag{24.11}$$

Тогда решение уравнений (24.10) описывается формулами

$$y_{jj}^{(k)}=\varphi_{kjj}(\tau_j)\equiv\widetilde{U}_j(\tau_j,0)\left\{\left[x_j^\circ(\mu)\right]^{(k)}-\sum_{l=\overline{1,m},\ l\neq j}\varphi_{klj}(0)\right\}+$$

$$+\int_0^{\tau_j} \widetilde{U}_j(\tau_j,\sigma_j)\cdot f_{kjj}(\sigma_j)d\sigma_j, \quad k\geqslant 1, \quad j=\overline{1,m}. \qquad (24.12)$$

в) После подстановки (24.8) в (24.4) получаются формулы для коэффициентов $y_{ji}^{(k)}$:

$$y_{ji}^{(k)}=\varphi_{kji}(\tau_j)\equiv\widetilde{\varphi}_{kji}\Big(\varphi_{kjj}(\tau_j),\tau_j\Big), \quad i=\overline{j+1,m}, \quad j=\overline{1,m-1}. \qquad (24.13)$$

Результаты 24.2. Функции $y_{ji}^{(k)}$, $i=\overline{j,m}$, $j=\overline{1,m}$ находятся последовательно для $j=1,\dots,m$. При фиксированном значении j:

а) для $k=0$ функция $y_{jj}^{(0)}$ определяется соотношениями (24.8), (24.9), функции $y_{ji}^{(0)}$, $i=\overline{j+1,m}$ определяются соотношениями (24.4), (24.5), (24.13);

б) для $k\geqslant 1$ функция $y_{jj}^{(k)}$ находится по формулам (24.12), функции $y_{ji}^{(k)}$, $i=\overline{j+1,m}$, $j<m$, находятся по формулам (24.7), (24.13).

§ 25. Порядок вычисления коэффициентов асимптотики при $m=2$

Приведем результаты § 24 для $m=2$.

Коэффициенты ряда (23.2) определяются последовательно для $k=0,1,\dots$. При фиксированном значении k:

25.1.

Находится функция $y_{21}^{(k)}$ по формулам

$$y_{21}^{(0)}=0; \quad y_{21}^{(k)}=\varphi_{k21}(\tau_2)\equiv-\int_{\tau_2}^{\infty} f_{k21}(\sigma)d\sigma, \quad k\geqslant 1,$$

$$f_{k21}(\tau_2)\equiv\Bigg[\mu^{K_2}F_1\Bigg(\sum_{q=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{2}y_l^{(q)}(\tau_2\mu^{K_2-K_1})\mu^q,\tau_2\mu^{K_2},\mu\Bigg)- \qquad (25.1)$$

$$-\mu^{K_2}F_1\Bigg(\sum_{q=0}^{k-1}y_1^{(q)}(\tau_2\mu^{K_2})\mu^q,\tau_2\mu^{K_2},\mu\Bigg)\Bigg]^{(k)}.$$

25.2.

Если $k=0$, то находится $y_{12}^{(0)}$ как функция от $y_{11}^{(0)}$ и t:

$$y_{12}^{(0)}=\widetilde{\varphi}_{012}(y_{11}^{(0)},t) \qquad (25.2)$$

из уравнения

$$F_2(y_1^{(0)}, t, 0) = 0, \quad y_1^{(0)} = (y_{11}^{(0)}, y_{12}^{(0)}).$$

25.3.

Находится функция $y_{11}^{(k)}(t)$. Если $k = 0$, то $y_{11}^{(0)}(t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{dy_{11}^{(0)}}{dt} = F_1\left(\widetilde{y}_1^{(0)}, t, 0\right), \quad y_{11}^{(0)}(0) = x_1^\circ(0),$$

$$\widetilde{y}_1^{(0)} \equiv \left(y_{11}^{(0)}, \widetilde{\varphi}_{012}(y_{11}^{(0)}, t)\right).$$

Если $k \geqslant 1$, то

$$y_{11}^{(k)} = \varphi_{k11}(t) \equiv \widetilde{U}_1(t,0) \cdot \left\{[x_1^\circ(\mu)]^{(k)} - \varphi_{k21}(0)\right\} + \int\limits_0^t \widetilde{U}_1(t,\sigma) \cdot f_{k11}(\sigma)\, d\sigma,$$

$\widetilde{U}_1(t,\sigma)$ — матрица Коши уравнения

$$\frac{dr_1}{dt} = \widetilde{A}_1(t) r_1,$$

φ_{k21} — функция (25.1),

$$\widetilde{A}_1(t) \equiv \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1}\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right](y_1^{(0)}(t), t, 0),$$

$$\begin{aligned} f_{k11}(t) \equiv &\left[\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1}\right]\left(y_1^{(0)}(t), t, 0\right) \cdot f_{k12}(t) + \\ &+ \left[F_1\left(\sum_{q=0}^{k-1} y_1^{(q)}(t)\mu^q, t, \mu\right)\right]^{(k)}, \end{aligned} \tag{25.3}$$

$$f_{k12}(t) \equiv \left[\sum_{q=0}^{k-1} \frac{y_{12}^{(q)}(t)}{dt}\mu^{K_2+q} - F_2\left(\sum_{q=0}^{k-1} y_1^{(q)}(t)\mu^q, t, \mu\right)\right]^{(k)}.$$

25.4.

Находится функция $y_{12}^{(k)}(t)$. Если $k = 0$, то из (25.2) получаем

$$y_{12}^{(0)} = \varphi_{012}(t) \equiv \widetilde{\varphi}_{012}\left(y_{11}^{(0)}(t), t\right). \tag{25.4}$$

Если $k \geqslant 1$, то

$$\begin{aligned} y_{12}^{(k)} = \varphi_{k12}(t) \equiv &\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1}\left(y_1^{(0)}(t), t, 0\right) \times \\ &\times \left[-\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\left(y_1^{(0)}(t), t, 0\right) \cdot y_{11}^{(k)}(t) + f_{k12}(t)\right], \end{aligned} \tag{25.5}$$

$f_{k12}(t)$ — функция (25.3).

25.5.

Находится функция $y_{22}^{(k)}(\tau_2)$. Если $k = 0$, то $y_{22}^{(0)}$ — решение задачи Коши

$$\frac{dy_{22}^{(0)}}{d\tau_2} = F_2\big(y_1^{(0)}(0) + \widetilde{y}_2^{(0)}, 0, 0\big) - F_2\big(y_1^{(0)}(0), 0, 0\big),$$

$$y_{22}^{(0)}(0) = x_2^{\circ}(0) - \varphi_{012}(0), \quad \widetilde{y}_2^{(0)} \equiv (0, y_{22}^{(0)}),$$

φ_{012} — функция (25.4).

Если $k \geqslant 1$, то

$$y_{22}^{(k)} = \widetilde{U}_2(\tau_2, 0) \cdot \Big\{[x_2^{\circ}(\mu)]^{(k)} - \varphi_{k12}(0)\Big\} + \int\limits_0^{\tau_2} \widetilde{U}_2(\tau_2, \sigma_2) \cdot f_{k22}(\sigma_2)\, d\sigma_2,$$

$\widetilde{U}_2(\tau_2, \sigma_2)$ — матрица Коши уравнения

$$\frac{dr_2}{d\tau_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\big(Y_2(\tau_2), 0, 0\big) \cdot r_2, \quad Y_2(\tau_2) = y_1^{(0)}(0) + y_2^{(0)}(\tau_2),$$

φ_{k12} — функция (25.5),

$$\begin{aligned} f_{k22}(\tau_2) \equiv {} & \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\big(Y_2(\tau_2), 0, 0\big) \cdot \varphi_{k21}(\tau_2) + \\ & + \left[\frac{\partial F_2}{\partial x}\big(Y_2(\tau_2), 0, 0\big) - \frac{\partial F_2}{\partial x}\big(y_1^{(0)}(0), 0, 0\big)\right] y_1^{(k)}(0) + \\ & + \left[F_2\left(\sum_{q=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{2} y_l^{(q)}(\tau_2\mu^{K_2-K_l})\mu^q, \tau_2\mu^{K_2}, \mu\right) - \right. \\ & \left. - F_2\left(\sum_{q=0}^{k-1} y_1^{(q)}(\tau_2\mu^{K_2})\mu^q, \tau_2\mu^{K_2}, \mu\right)\right]^{(k)}, \end{aligned}$$

φ_{k21} — функция (25.1).

§ 26. Условия, налагаемые на сингулярные уравнения

Перечислим условия, при выполнении которых ряд (23.2) является асимптотическим решением задачи (22.1). В асимптотику входят функции $y_j^{(0)}(\tau_j)$, являющиеся решением уравнений (23.5). Предполагаем, что явный вид $y_j^{(0)}(\tau_j)$ известен. Введем новую переменную

$$\Delta x = x - \overline{x}(t), \quad \overline{x}(t) = y_1^{(0)}(t).$$

Это позволит привести задачу (22.1) к виду, удобному для формулировки и доказательства теорем:

$$\mu^{K_i}\frac{d\Delta x_i}{dt} = \Delta F_i(\Delta x, t, \mu), \quad \Delta x_i|_{t=0} = \Delta x_i^\circ(\mu),$$
$$\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m), \quad i = \overline{1, m}.$$

Здесь

$$\Delta F_1(x, t, \mu) = F_1\bigl(\overline{x}(t) + x, t, \mu\bigr) - F_1(\overline{x}(t), t, 0),$$

$$\Delta F_i(x, t, \mu) = F_i\bigl(\overline{x}(t) + x, t, \mu\bigr) - \mu^{K_i}\frac{d\overline{x}_i(t)}{dt},$$

$$\Delta x_1^\circ(\mu) = x_1^\circ(\mu) - x_1^\circ(0), \quad \Delta x_i^\circ(\mu) = x_i^\circ(\mu) - \overline{x}_i(0), \quad i = \overline{2, m}.$$

Так как $\overline{x}(t)$ — решение вырожденной задачи (22.2), то

$$\Delta F_i(0, t, 0) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad \Delta x_1^\circ(0) = 0.$$

Исходя из проделанных вычислений, будем предполагать, что в системе (22.1) уже проведена соответствующая замена, и значит выполняется

Условие 26.1. $F_i(0, t, 0) = 0$, $x_1^\circ(0) = 0$, $i = \overline{1, m}$, $t \in D_t$.

Условие 26.2. *Функции* $F_i(x, t, \mu)$ *имеют непрерывные, ограниченные по норме частные производные до* $(n+2)$*-го порядка включительно по всем переменным при* $x \in D_x$, $t \in D_t$, $0 \leqslant \mu \leqslant \overline{\mu}$, $i = \overline{1, m}$.

Условие 26.3. *Функция* $x^\circ(\mu)$ *имеет непрерывные производные до* $(n+1)$*-го порядка включительно при* $0 \leqslant \mu \leqslant \overline{\mu}$.

Условие 26.4. *Матрицы* $H_i(x, t, 0)$ *ограничены по норме при* $x \in D_x$, $t \in D_t$, $i = \overline{1, m-1}$,

$$H_i(x, t, \mu) = \left[\frac{\partial(F_{i+1} \dots F_m)}{\partial(x_{i+1} \dots x_m)}\right]^{-1}(x, t, \mu). \tag{26.1}$$

При выполнении условия 26.1 вырожденная задача имеет нулевое решение:

$$\overline{x}(t) = y_1^{(0)}(t) = 0.$$

Будем рассматривать именно это решение, хотя в общем случае оно не единственно (смотрите пример 31.4).

Рассмотрим $y_j^{(0)}$ при $j > 1$. Запишем уравнения (24.9) для $y_{jj}^{(0)}$, $j = \overline{2, m}$, в следующем виде:

$$\frac{dy_{jj}^{(0)}}{d\tau_j} = \Phi_j(y_{jj}^{(0)}), \quad y_{jj}^{(0)}(0) = x_j^\circ(0) - \sum_{l=1}^{j-1} y_{lj}^{(0)}(0). \tag{26.2}$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
\Phi_j(y_{jj}^{(0)}) = F_j\left(\sum_{l=1}^{j-1} y_l^{(0)}(0) + \widetilde{y}_j^{(0)}, 0, 0\right) - F_j\left(\sum_{l=1}^{j-1} y_l^{(0)}(0), 0, 0\right); \\
\widetilde{y}_j^{(0)} = \left(0, \dots, 0, y_{jj}^{(0)}, \widetilde{\varphi}_{0jj+1}(y_{jj}^{(0)}), \dots, \widetilde{\varphi}_{0jm}(y_{jj}^{(0)})\right) \quad \text{при} \quad j < m, \\
\widetilde{y}_m^{(0)} = \left(0, \dots, 0, y_{mm}^{(0)}\right).
\end{gathered} \tag{26.3}
$$

Функции

$$
y_{ji}^{(0)} = \widetilde{\varphi}_{0ji}(y_{jj}^{(0)}), \quad i = \overline{j+1, m}, \tag{26.4}
$$

являются решением уравнений (24.5), которые запишем в виде

$$
\begin{gathered}
F_i\left(\sum_{l=1}^{j-1} y_l^{(0)}(0) + y_j^{(0)}, 0, 0\right) - F_i\left(\sum_{l=1}^{j-1} y_l^{(0)}(0), 0, 0\right) = 0, \\
y_j^{(0)} = \left(0, \dots, 0, y_{jj}^{(0)}, \dots, y_{jm}^{(0)}\right), \\
i = \overline{j+1, m}, \quad j = \overline{2, m-1}, \quad m > 2.
\end{gathered} \tag{26.5}
$$

Из написанных уравнений видно, что Φ_j, $\widetilde{\varphi}_{0ji}$ не зависят явно от τ_j при $j \geqslant 2$. Кроме того, существует нулевое решение уравнений (26.5):

$$
y_{jj}^{(0)} = \ldots = y_{jm}^{(0)} = 0. \tag{26.6}
$$

Будем рассматривать функции (26.4) в окрестности нулевого решения.

Условие 26.5. *а)* $y_1^{(0)}(t) = 0$, *б) Если* $m > 2$, $j = \overline{2, m-1}$, *то* $\widetilde{\varphi}_{0ji}(0) = 0$, $i = \overline{j+1, m}$; $\widetilde{y}_j^{(0)} \in D_x$ *при* $y_{jj}^{(0)} \in D_j$.

При выполнении условия 26.5 из (26.3) следуют равенства

$$
\Phi_j(0) = 0, \quad j = \overline{2, m}.
$$

Поэтому дифференциальное уравнение

$$
\frac{dr_j}{d\tau_j} = \Phi_j(r_j) \tag{26.7}
$$

имеет нулевое решение.

Определение 26.1. Уравнение (26.7) называется *присоединенным уравнением* $(m+1-j)$*-го порядка задачи* (22.1).

Определение 26.2. *Областью влияния* D_{j*} *нулевого решения уравнения* (26.7) называется множество таких точек $r_j^\circ \in D_j$, что решение $r_j = r_j(\tau_j)$ уравнения (26.7) с начальным условием $r_j(0) = r_j^\circ$ существует при $\tau_j \geqslant 0$, $r_j(\tau_j) \in D_j$, $r_j(\tau_j) \to 0$ при $\tau_j \to \infty$.

Условие 26.6. *При* $j = \overline{2, m}$: *а) собственные числа матриц* A_{j*} *лежат в левой полуплоскости,*

$$A_{j*} = A_j\Bigl(\sum_{l=1}^{j-1} y_l^{(0)}(0), 0, 0\Bigr),$$
$$A_j(x,t,\mu) = \left[\frac{\partial F_j}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial(x_{j+1}\ldots x_m)} H_j \frac{\partial(F_{j+1}\ldots F_m)}{\partial x_j}{}_{(j<m)}\right](x,t,\mu), \tag{26.8}$$

б) точка

$$y_{jj}^{(0)}(0) = x_j^\circ(0) - \sum_{l=1}^{j-1} y_{lj}^{(0)}(0)$$

принадлежит области влияния D_{j*} *нулевого решения присоединенного уравнения* (26.7).

Отметим, что из условия 26.6а следует асимптотическая устойчивость нулевого решения уравнения (26.7). Поэтому $D_{j*} \neq \varnothing$ [4].

Условие 26.7. *Множество*

$$D_x^{(0)} = \Bigl\{x\colon\ x = \sum_{l=2}^{m} \theta_l y_l^{(0)}(\tau_l),\ \tau_l \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta_l \leqslant 1\Bigr\}$$

принадлежит области D_x.

Обозначим $U_i(t, s, \mu)$ матрицу Коши уравнения

$$\mu^{K_i}\frac{dr_i}{dt} = A_i\Bigl(\sum_{j=1}^{i-1} y_j^{(0)}(t\mu^{-K_j})_{(i>1)}, t, 0\Bigr) r_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{26.9}$$

где матрица A_i, $i = \overline{1, m}$, определяется по формуле (26.8).

Условие 26.8. *Матрицы* $U_i(t, s, \mu)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\|U_i(t, s, \mu)\| \leqslant C_i \exp\bigl\{-\kappa_i(t-s)\mu^{-K_i}\bigr\} \tag{26.10}$$

при $0 \leqslant s \leqslant t$, $s \in D_t$, $t \in D_t$, $0 < \mu \leqslant \bar{\mu}$, $i = \overline{2, m}$.

§ 27. Условия, налагаемые на сингулярные уравнения при $m = 2$

Перечислим условия, изложенные в § 26, для $m = 2$.

Условие 27.1. $F_i(0, t, 0) = 0$, $x_1^\circ(0) = 0$, $i = 1, 2$, $t \in D_t$.

Условие 27.2. *Функции* $F_i(x, t, \mu)$ *имеют непрерывные, ограниченные по норме частные производные до* $(n+2)$*-го порядка включительно по всем переменным при* $x \in D_x$, $t \in D_t$, $0 \leqslant \mu \leqslant \bar{\mu}$, $i = 1, 2$.

Условие 27.3. *Функция $x^\circ(\mu)$ имеет непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно при $0 \leqslant \mu \leqslant \bar{\mu}$.*

Условие 27.4. *Матрица $H_1(x, t, 0)$ ограничена по норме при $x \in D_x$, $t \in D_t$,*

$$H_1(x, t, \mu) = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1}(x, t, \mu).$$

Условие 27.5. $y_1^{(0)}(t) = 0$.

Условие 27.6. *Собственные числа матрицы*

$$A_{2*} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)(0, 0, 0)$$

лежат в левой полуплоскости, б) точка $x_2^\circ(0)$ принадлежит области влияния D_{2*} нулевого решения уравнения

$$\frac{dr_2}{d\tau_2} = F_2\left(\widetilde{r}, 0, 0\right), \quad \widetilde{r} = (0, r_2).$$

Отметим, что $D_{2*} \neq \varnothing$ (смотрите § 26).

Условие 27.7. *Множество $D_x^{(0)} = \left\{x\colon x = \theta y_2^{(0)}(\tau_2), \tau_2 \geqslant 0, 0 \leqslant \theta \leqslant 1\right\}$ принадлежит окрестности D_x.*

Условие 27.8. *Матрица Коши $U_2(t, s, \mu)$ уравнения*

$$\mu^{K_2}\frac{dr_2}{dt} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)(0, t, 0)\, r_2$$

удовлетворяет неравенствам

$$\|U_2(t, s, \mu)\| \leqslant C \exp\left\{-\kappa_2(t-s)\mu^{-K_2}\right\}$$

при $0 \leqslant s \leqslant t$, $s \in D_t$, $t \in D_t$, $0 < \mu \leqslant \bar{\mu}$.

§ 28. Формулировки теорем о методе пограничных функций

28.1. Асимптотическое решение

Сформулируем теоремы о близости решения задачи (22.1) к частичной сумме $X_n(t, \mu)$ ряда (23.2), построенного методом пограничных функций,

$$X_n(t, \mu) \equiv \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j^{(k)}(\tau_j)\mu^k. \tag{28.1}$$

Теорема 28.1. (*Васильевой* [11]). *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_2, ..., κ_m, C_2, ..., C_m, T, *что при* $D_t = \{t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$ *выполняются условия* 26.1–26.8. *Тогда найдутся* $\mu_* > 0$, C_*, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (22.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t, \mu) - X_n(t, \mu)\| \leqslant C_* \mu^{n+1} \tag{28.2}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Теорема 28.2. (*Бутузова*). *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_1, ..., κ_m, C_1, ..., C_m, *что при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 26.1–26.8 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t, s)\| \leqslant C_1 \exp\left\{-\kappa_1(t - s)\right\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{28.3}$$

Тогда найдутся $\mu_* > 0$, C_*, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (22.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t, \mu) - X_n(t, \mu)\| \leqslant C_* \mu^{n+1}$$

при $t \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Теорема 28.3. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_2, ..., κ_m, C_1, ..., C_m *и постоянные* $\kappa_1 \geqslant 0$, $C_1^\circ \geqslant 0$, *что при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 26.1–26.8 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t, s)\| \leqslant C_1^\circ (t - s)^{\kappa_1} + C_1, \quad 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{28.4}$$

Тогда для любых значений $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < [2(\kappa_1 + 1)]^{-1}$, *найдутся* $\mu_* > 0$, C_*, $C_*^\circ \geqslant 0$, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (22.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t, \mu) - X_n(t, \mu)\| \leqslant \mu^{n+1}\left[C_*^\circ t^{(\kappa_1+1)(2n+1)} + C_*\right]$$

при $0 \leqslant t \leqslant T\mu^{-\chi}$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Теорема 28.4. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_1, ..., κ_m, C_1, ..., C_m, *что при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 26.1–26.8 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t, s)\| \leqslant C_1 \exp\left\{\kappa_1(t - s)\right\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{28.5}$$

Тогда для любых значений $T \geqslant 0$, χ, $0 \leqslant \chi < (n + 1)[(n + 2)\kappa_1]^{-1}$, *найдутся* $\mu_* > 0$, C_*, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (22.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t, \mu) - X_n(t, \mu)\| \leqslant C_* \mu^{n+1} \exp\left\{(n + 1)\kappa_1 t\right\}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T - \chi \ln \mu$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Здесь $U_1(t, s)$ — матрица Коши уравнения (26.9) при $i = 1$ (матрица от μ не зависит).

Из теорем 28.1–28.4 следует, что при выполнении соответствующих условий функция (28.1) является асимптотическим решением задачи (22.1) на отрезке (теорема 28.1), на полуоси (теорема 28.2), на асимптотически больших интервалах времени (теоремы 28.3, 28.4). Справедливы равенства

$$x(t,\mu) = X_n(t,\mu) + o(\mu^n), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \mu \to 0 \quad \text{(теорема 28.1)};$$

$$x(t,\mu) = X_n(t,\mu) + o(\mu^n), \quad t \geqslant 0, \quad \mu \to 0 \quad \text{(теорема 28.2)};$$

$$x(t,\mu) = X_n(t,\mu) + o(\mu^{n\chi_*}), \quad 0 \leqslant t \leqslant T\mu^{-\chi}, \quad \mu \to 0 \quad \text{(теорема 28.3)},$$

T, χ произвольные числа из множества

$$T > 0, \quad 0 \leqslant \chi < [2(\kappa_1 + 1)]^{-1}, \quad \chi_* = 1 - 2\chi(\kappa_1 + 1);$$

$$x(t,\mu) = X_n(t,\mu) + o(\mu^{n\chi_*}), \quad 0 \leqslant t \leqslant T - \chi \ln \mu, \quad \mu \to 0 \quad \text{(теорема 28.4)},$$

T, χ — произвольные числа из множества

$$T \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \chi < (2\kappa_1)^{-1}, \quad \chi_* = 1 - 2\kappa_1\chi.$$

28.2. Оценка остаточного члена, интервала времени, значений малого параметра

Чтобы сформулировать теорему, позволяющую оценивать численно остаточный член асимптотического разложения решения, рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{du_1}{dt} = B_1(t,\mu)u + G_1(u,t,\mu),$$
$$\mu^{K_i}\frac{du_i}{dt} = B_i(t,\mu)u + G_i(u,t,\mu), \quad u|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{2,m}. \tag{28.6}$$

Здесь $u = (u_1, \ldots, u_m)$; u_i, G_i — N_i-мерные векторы; $B_i(t,\mu)$ — матрицы размерности $N_i \times N$; $N = N_1 + \ldots + N_m$; $0 = K_1 < \ldots < K_m$; $i = \overline{1,m}$, $m \geqslant 2$.

От задачи (22.1) к задаче (28.6) можно перейти, вводя замену переменных

$$x = x^\circ(\mu) + u \quad \text{или} \quad x = X_n(t,\mu) - X_n(0,\mu) + x^\circ(\mu) + u$$

и выделяя в правых частях дифференциальных уравнений линейные по u члены.

Введем обозначения

$$B_i = (B_{i1} \ \ldots \ B_{im}), \quad i = \overline{1,m}. \tag{28.7}$$

$$\begin{pmatrix} b_{j\ j+1\ j+1} & \cdots & b_{j\ j+1\ m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j\ m\ j+1} & \cdots & b_{j\ m\ m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{j+1\ j+1} & \cdots & B_{j+1\ m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m\ j+1} & \cdots & B_{mm} \end{pmatrix}^{-1},$$

$$j = \overline{1, m-1}.$$

$$B_{jl*} = B_{jl} - (B_{jj+1} \dots B_{jm}) \cdot \begin{pmatrix} b_{j\ j+1\ j+1} & \dots & b_{j\ j+1\ m} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ b_{j\ m\ j+1} & \dots & b_{j\ m\ m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{j+1\ l} \\ \vdots \\ B_{ml} \end{pmatrix}_{(j<m)},$$

$$j = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, j}.$$

$$P_{jl*} = -(B_{jj+1} \dots B_{jm}) \cdot \begin{pmatrix} b_{j\ j+1\ l} \\ \vdots \\ b_{j\ m\ l} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad l = \overline{j+1, m}.$$

$$B_{1jl}(t, s, \mu) = \mu^{-K_j}\ V_j(t, s, \mu) \cdot B_{jl*}(s, \mu)_{(l<j)} -$$

$$- \mu^{K_l - K_j}\ V_j(t, s, \mu) \left[\mu^{-K_j}\ B_{jj*}(s, \mu) \cdot P_{jl*}(s, \mu) - \frac{\partial P_{jl*}(s, \mu)}{\partial s} \right]_{(l>j)},$$

$$j = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, m}.$$

$$P_{1jl}(t, s, \mu) = \mu^{-K_j}\ V_j(t, s, \mu) \left[E_{j\ (l=j)} + P_{jl*}(s, \mu)_{(l>j)} \right], \quad j = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, m}.$$

$$B_{i+1\ j\ l}\ (t, s, \mu) = B_{ijl}(t, s, \mu)_{(l\neq i)} - \mu^{K_l - K_i} B_{iji}(t, s, \mu) \cdot P_{il*}(s, \mu)_{(l>i)} +$$

$$+ \int\limits_s^t B_{iji}(t, r, \mu) \cdot B_{iil}(r, s, \mu)\, dr, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{i+1, m}, \quad l = \overline{1, m}.$$

$$P_{i+1\ j\ l}\ (t, s, \mu) = P_{ijl}(t, s, \mu) + \int\limits_s^t B_{iji}(t, r, \mu) \cdot P_{iil}(r, s, \mu)\, dr,$$

$$i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{i+1, m}, \quad l = \overline{1, m}.$$

$$v(t, \mu) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \|u(s, \mu)\|.$$

$$a(t, \mu) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t\ i = \overline{1, m}} \int\limits_0^s \sum_{l=1}^m \|P_{iil}(s, r, \mu)\| \cdot L_{2l}(r, \mu)\, dr.$$

$$b(t, \mu) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t\ i = \overline{1, m}} \left\{ \sum_{l=i+1}^m \|P_{il*}(s, \mu)\| \mu^{K_l - K_i}{}_{(i<m)} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^s \sum_{l=1}^m \left[\|B_{iil}(s, r, \mu)\| + \|P_{iil}(s, r, \mu)\| \cdot L_{1l}(r, \mu) \right] dr \right\}.$$

$$c(t, \mu) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t\ i = \overline{1, m}} \int\limits_0^s \sum_{l=1}^m \|P_{iil}(s, r, \mu) \cdot G_l(0, r, \mu)\|\, dr.$$

Здесь B_{ij} — блоки размерности $N_i \times N_j$, b_{jik} — блоки размерности $N_i \times N_k$, E_j — единичная матрица размерности $N_j \times N_j$, $V_j(t, s, \mu)$ — матрица Коши системы

$$\mu^{K_j} \frac{dr_j}{dt} = B_{jj*}(t, \mu) \cdot r_j, \quad j = \overline{1, m}. \tag{28.8}$$

Норму матрицы A размерности $N_1 \times N_2$ определим равенством

$$\|A\| \equiv \max_{i=\overline{1,N_1}} \sum_{j=1}^{N_2} |A_{ij}|.$$

Перечислим условия, при которых будем рассматривать задачу (28.6).

Условие 28.1. *При $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \widetilde{\mu}$, $i = \overline{1, m}$ функции $B_i(t, \mu)$ непрерывно дифференцируемы по t и непрерывны по μ.*

Условие 28.2. *При $\|u\| \leqslant \delta$, $\|\widetilde{u}\| \leqslant \delta$, $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \widetilde{\mu}$, $i = \overline{1, m}$ функции $G_i(u, t, \mu)$ непрерывны по u, t и удовлетворяют неравенствам*

$$\|G_i(u, t, \mu) - G_i(\widetilde{u}, t, \mu)\| \leqslant \left[L_{1i}(t, \mu) + L_{2i}(t, \mu) \cdot \left(\|u\| + \|\widetilde{u}\|\right)\right] \cdot \|u - \widetilde{u}\|, \tag{28.9}$$

где функции $L_{1i}(t, \mu) \geqslant 0$, $L_{2i}(t, \mu) \geqslant 0$ непрерывны по t при $0 \leqslant i \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \widetilde{\mu}$, $i = \overline{1, m}$.

Условие 28.3. *При $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \widetilde{\mu}$, $j = \overline{1, m-1}$*

$$\det \begin{pmatrix} B_{j+1\ j+1} & \cdots & B_{j+1\ m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m\ j+1} & \cdots & B_{m\ m} \end{pmatrix} (t, \mu) \neq 0. \tag{28.10}$$

Теорема 28.5. *Пусть существуют такие постоянные $\delta > 0$, $\widetilde{\mu} > 0$ и функция $t_*(\mu) > 0$, что для (28.6) выполняются условия 28.1–28.3. Тогда для всех значений t, μ из множества*

$$p(t, \mu) \equiv 1 - b(t, \mu) > 0, \quad q(t, \mu) \equiv p^2(t, \mu) - 4a(t, \mu)c(t, \mu) > 0, \tag{28.11}$$

$$2c(t, \mu) < \delta \left[p(t, \mu) + \sqrt{q(t, \mu)}\right], \quad 0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu), \quad 0 < \mu \leqslant \widetilde{\mu}$$

решение задачи (28.6) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|u(t, \mu)\| \leqslant \frac{2c(t, \mu)}{p(t, \mu) + \sqrt{q(t, \mu)}}. \tag{28.12}$$

Если $t_*(\mu) = \infty$, то неравенство «$\leqslant t_*(\mu)$» нужно заменить на «$< \infty$»

28.3. Второй метод Ляпунова

Оценку решения задачи Тихонова можно получить, используя второй метод Ляпунова. Введем обозначения: J — целое число, $1 \leqslant J \leqslant N$; $\widetilde{x}$ — вектор, состоящий из J компонент вектора x; D — множество в пространстве $R^{N+2} \ni (x, t, \mu)$; $D_* = \{(x, t, \mu)\colon \|x\| \leqslant \delta, t \geqslant 0, 0 < \mu \leqslant \bar{\mu}\}$.

Определение 28.1. *Производной по времени функции $\Lambda(x, t, \mu)$ в силу системы* (22.1) называется функция

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Lambda(x, t, \mu)}{\partial x_i} F_i(x, t, \mu)\mu^{-K_i} + \frac{\partial \Lambda(x, t, \mu)}{\partial t}.$$

В основе второго метода Ляпунова лежит следующее обстоятельство. Пусть при $(x, t, \mu) \in D$ производная по времени функции $\Lambda(x, t, \mu)$ в силу системы (22.1) неположительна. Тогда для решения $x = x(t, \mu)$ задачи (22.1) справедливо неравенство

$$\Lambda\big(x(T, \mu), T, \mu\big) \leqslant \Lambda\big(x^\circ(\mu), 0, \mu\big) \tag{28.13}$$

при всех T, μ, удовлетворяющих условиям: при $0 \leqslant t \leqslant T$ решение $x(t, \mu)$ существует и $\big(x(t, \mu), t, \mu\big) \in D$. Неравенство (28.13) позволяет иногда получить оценку вектора x или отдельных его компонент. Например, справедлива

Теорема 28.6. *Пусть для некоторых постоянных $\delta > 0$, $\bar{\mu} > 0$, $\rho > 0$ выполнены условия.*

1. *При $(x, t, \mu) \in D_*$ функции $F_i(x, t, \mu)$, $i = \overline{1, m}$, непрерывны по t и имеют непрерывные по x, t частные производные по компонентам вектора x.*
2. *Существует такая функция $\Lambda(x, t, \mu)$, что: а) при $(x, t, \mu) \in D_*$ производная $\Lambda(x, t, \mu)$ в силу системы* (22.1) *существует и неположительна*; *б) $\Lambda(x, t, \mu) \geqslant \rho$ при $(x, t, \mu) \in D_*$, $\|\widetilde{x}\| = \delta$.*

Тогда, если множество

$$0 < \mu \leqslant \bar{\mu}, \quad \|x^\circ(\mu)\| < \delta, \quad \Lambda\big(x^\circ(\mu), 0, \mu\big) < \rho \tag{28.14}$$

не пусто, то для любого μ из этого множества решение задачи (22.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству $\|\widetilde{x}(t, \mu)\| < \delta$ при $0 \leqslant t \leqslant t_*$, $t < \infty$. Если $J = N$, то $t_* = \infty$; если $J < N$, то $t_* = t_*(\mu) > 0$.*

Теорема 28.6 аналогична теореме Ляпунова при $J = N$ [33] и теореме Румянцева при $J < N$ [41]. Доказательство теоремы 28.6 аналогично доказательству теоремы 2.11, данному в § 7. Функция $\Lambda(x, t, \mu)$, удовлетворяющая условиям 2а, 2б, является функцией Ляпунова.

Из доказательства теоремы 28.6 следует: для всех μ из множества (28.14) и t, $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, справедливо неравенство

$$\Lambda\big(x(t, \mu), t, \mu\big) \leqslant \Lambda\big(x^\circ(\mu), 0, \mu\big). \tag{28.15}$$

Неравенство $d\Lambda/dt \leqslant 0$ и неравенства (28.14), (28.15) позволяют иногда получить оценку решения задачи Тихонова и оценку значений t и μ (смотрите пример 31.11).

Второй метод Ляпунова применялся при исследовании задачи Тихонова во многих работах [13, 14, 16, 22, 34, 40, 44, 47].

28.4. Замечания

Замечание 28.1. Теорема Бутузова 28.2 дана в [7] с ошибочным условием на матрицу A_1 (смотрите ссылку в [6]). Теорема в [7] верна, если выполняется условие 28.3 на матрицу U_1.

Замечание 28.2. Определение 22.1 сингулярно возмущенной задачи Коши дано для отрезка $0 \leqslant t \leqslant T$. Из теорем 28.2–28.4 следует, что при определенных условиях решение сингулярно возмущенной задачи распространяется на бесконечный и на асимптотически большой интервал времени.

Замечание 28.3. При $m = 2$ условия 26.1–26.8 эквивалентны условиям 27.1–27.8 соответственно.

§ 29. Доказательство теоремы 28.5

Из условий 28.1, 28.2 и из теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [4] следует: для любого значения μ, $0 < \mu \leqslant \widetilde{\mu}$, существует такое значение $t_1 = t_1(\mu)$, $0 < t_1(\mu) \leqslant t_*(\mu)$, что решение задачи (28.6) существует, единственно, непрерывно дифференцируемо по t и удовлетворяет неравенству $\|u\| \leqslant \delta$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1(\mu)$. Рассмотрим множество

$$0 \leqslant t \leqslant t_1(\mu), \quad 0 < \mu \leqslant \widetilde{\mu}. \tag{29.1}$$

Для $j = \overline{1, m-1}$ из последних $(m-j)$ дифференциальных уравнений (28.6) выразим $u_{j+1}, \ldots, u_m$:

$$\begin{pmatrix} u_{j+1} \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{j\ j+1\ j+1} & \cdots & b_{j\ j+1\ m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{j\ m\ j+1} & \cdots & b_{j\ m\ m} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} \mu^{K_{j+1}}\, du_{j+1}/dt \\ \vdots \\ \mu^{K_m}\, du_m/dt \end{pmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} B_{j+1\ 1} & \cdots & B_{j+1\ j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m\ 1} & \cdots & B_{m\ j} \end{pmatrix} (t, \mu) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{j+1} \\ \vdots \\ G_m \end{pmatrix} (u, t, \mu) \right]. \tag{29.2}$$

Это возможно по условию 28.3. Подставим (29.2) в j-е уравнение (28.6). Получим

$$\mu^{K_j} \frac{du_j}{dt} = \sum_{l=1}^{j} B_{jl*}(t, \mu) u_l + \sum_{l=j+1}^{m} P_{jl*}(t, \mu) \left[-\mu^{K_l} \frac{du_l}{dt} + \right.$$

$$\left. + G_l(u, t, \mu) \right]_{(j<m)} + G_j(u, t, \mu), \quad j = \overline{1, m}. \tag{29.3}$$

Функция $B_{jj*}(t,\mu)$ непрерывна по t при $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \widetilde{\mu}$. Поэтому при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \widetilde{\mu}$ матрица Коши системы (28.8) существует, единственна, дифференцируема по t, s и удовлетворяет равенству [4]

$$\mu^{K_j}\frac{\partial V_j(t,s,\mu)}{\partial s} = -V_j(t,s,\mu)\cdot B_{jj*}(s,\mu). \tag{29.4}$$

Рассмотрим (29.3) как линейное уравнение относительно u_j. На множестве (29.1) при нулевом начальном условии оно эквивалентно интегральному уравнению

$$u_j(t,\mu) = \mu^{-K_j}\int\limits_0^t V_j(t,s,\mu)\Bigg\{\sum_{l=1}^{j-1} B_{jl*}(s,\mu)\cdot u_l(s,\mu)_{(j>1)} +$$
$$+\sum_{l=j+1}^{m} P_{jl*}(s,\mu)\left[-\mu^{K_l}\frac{\partial u_l(s,\mu)}{\partial s} + G_l(u(s,\mu),s,\mu)\right]_{(j<m)} +$$
$$+ G_j(u(s,\mu),s,\mu)\Bigg\}\,ds, \quad j=\overline{1,m}. \tag{29.5}$$

Проинтегрируем слагаемые с множителем $\partial u_l(s,\mu)/\partial s$ по частям:

$$\mu^{-K_j}\int\limits_0^t V_j(t,s,\mu)\cdot P_{jl*}(s,\mu)\mu^{K_l}\frac{\partial u_l(s,\mu)}{\partial s}\,ds =$$
$$= \mu^{K_l-K_j}V_j(t,s,\mu)\cdot P_{jl*}(s,\mu)\cdot u_l(s,\mu)\Big|_0^t -$$
$$-\int\limits_0^t \mu^{K_l-K_j}\frac{\partial[V_j(t,s,\mu)\cdot P_{jl*}(s,\mu)]}{\partial s}u_l(s,\mu)\,ds =$$
$$= \mu^{K_l-K_j}P_{jl*}(t,\mu)\cdot u_l(t,\mu) - \int\limits_0^t \mu^{K_l-K_j}V_j(t,s,\mu)\times$$
$$\times\left[-\mu^{-K_j}B_{jj*}(s,\mu)\cdot P_{jl*}(s,\mu) + \frac{\partial P_{jl*}(s,\mu)}{\partial s}\right]u_l(s,\mu)\,ds. \tag{29.6}$$

Здесь было использовано равенство (29.4) и нулевое начальное условие (28.6). После преобразования (29.6) система (29.5) принимает вид

$$u_j(t,\mu) = -\sum_{l=j+1}^{m}\mu^{K_l-K_j}P_{jl*}(t,\mu)\cdot u_l(t,\mu)_{(j<m)} +$$

$$+\int\limits_0^t \sum_{l=1}^{m} \Big[B_{1jl}(t,s,\mu)\cdot u_l(s,\mu) + P_{1jl}(t,s,\mu)\cdot G_l(u(s,\mu),s,\mu)\Big]\,ds, \qquad (29.7)$$

$$j=\overline{1,m}.$$

Назовем S_i-системой систему следующих уравнений:

$$u_j(t,\mu) = -\sum_{l=j+1}^{m} \mu^{K_l-K_j} P_{jl*}(t,\mu)\cdot u_l(t,\mu)_{(j<m)} +$$

$$+\int\limits_0^t \sum_{l=1}^{m} \Big[B_{ijl}(t,s,\mu)\cdot u_l(s,\mu) + P_{ijl}(t,s,\mu)\cdot G_l(u(s,\mu),s,\mu)\Big]\,ds, \qquad (29.8)$$

$$j=\overline{i,m}.$$

Тогда (29.7) — S_1-система. Переход от S_i-системы к S_{i+1}-системе определим следующим образом ($i<m$): подставим выражение для $u_i(t,\mu)$ из i-го уравнения (29.8) в остальные уравнения (29.8). Получим

$$u_j(t,\mu) = -\sum_{l=j+1}^{m} \mu^{K_l-K_j} P_{jl*}(t,\mu)\cdot u_l(t,\mu)_{(j<m)} +$$
$$+\int\limits_0^t \Bigg\{ \sum_{l=\overline{1,m},\ l\neq i} B_{ijl}(t,s,\mu)\cdot u_l(s,\mu) -$$
$$- B_{iji}(t,s,\mu)\Bigg[\sum_{l=i+1}^{m} \mu^{K_l-K_i} P_{il*}(s,\mu)\cdot u_l(s,\mu) -$$
$$-\int\limits_0^s \sum_{l=1}^{m}\Big[B_{iil}(s,r,\mu)\cdot u_l(r,\mu) + P_{iil}(s,r,\mu)\cdot G_l(u(r,\mu),r,\mu)\Big]\,dr\Bigg]$$
$$+\sum_{l=1}^{m} P_{ijl}(t,s,\mu)\cdot G_l(u(s,\mu),s,\mu)\Bigg\}\,ds, \quad j=\overline{i+1,m}. \qquad (29.9)$$

Воспользуемся равенством

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^s \mathfrak{f}(s,r)\,dr\,ds = \int\limits_0^t \int\limits_s^t \mathfrak{f}(r,s)\,dr\,ds$$

и приведем уравнения (29.9) к виду

$$u_j(t,\mu) = -\sum_{l=j+1}^{m} \mu^{K_l-K_j} P_{jl*}(t,\mu)\cdot u_l(t,\mu)_{(j<m)} +$$

$$+\int_0^t \sum_{l=1}^{m} \left[B_{i+1jl}(t,s,\mu)\cdot u_l(s,\mu) + P_{i+1jl}(t,s,\mu)\cdot G_l(u(s,\mu),s,\mu)\right] ds,$$

$$j=\overline{i+1,m}.$$

Получили S_{i+1}-систему.

Рассмотрим i-е уравнения S_i-систем:

$$u_i(t,\mu) = -\sum_{l=i+1}^{m} \mu^{K_l-K_i} P_{il*}(t,\mu)\cdot u_l(t,\mu)_{(i<m)} +$$

$$+\int_0^t \sum_{l=1}^{m} \left[B_{iil}(t,s,\mu)\cdot u_l(s,\mu) + P_{iil}(t,s,\mu)\cdot G_l(u(s,\mu),s,\mu)\right] ds, \qquad (29.10)$$

$$i=\overline{1,m}.$$

Из них следуют неравенства

$$\|u_i(t,\mu)\| \leqslant \sum_{l=i+1}^{m} \mu^{K_l-K_i} \|P_{il*}(t,\mu)\|\cdot\|u_l(t,\mu)\|_{(i<m)} +$$

$$+\int_0^t \sum_{l=1}^{m} \big[\|B_{iil}(t,s,\mu)\|\cdot\|u_l(s,\mu)\| + \|P_{iil}(t,s,\mu)\cdot G_l(0,s,\mu)\| +$$

$$+\|P_{iil}(t,s,\mu)\|\cdot\|G_l(u(s,\mu),s,\mu) - G_l(0,s,\mu)\|\big] ds \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=i+1}^{m} \mu^{K_l-K_i} \|P_{il*}(t,\mu)\| v(t,\mu)_{(i<m)} +$$

$$+\int_0^t \sum_{l=1}^{m} \Big\{\|B_{iil}(t,s,\mu)\| v(s,\mu) + \|P_{iil}(t,s,\mu)\cdot G_l(0,s,\mu)\| +$$

$$+\|P_{iil}(t,s,\mu)\|\cdot\left[L_{1l}(s,\mu)v(s,\mu) + L_{2l}(s,\mu)v^2(s,\mu)\right]\Big\} ds \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=i+1}^{m} \mu^{K_l-K_i} \|P_{il*}(t,\mu)\| v(t,\mu)_{(i<m)} +$$

$$+\int_0^t \sum_{l=1}^{m} \Big\{\|B_{iil}(t,s,\mu)\| v(t,\mu) + \|P_{iil}(t,s,\mu)\cdot G_l(0,s,\mu)\| +$$

$$+\|P_{iil}(t,s,\mu)\|\left[L_{1l}(s,\mu)v(t,\mu) + L_{2l}(s,\mu)v^2(t,\mu)\right]\Big\} ds, \quad (29.11)$$

$$i=\overline{1,m}.$$

Здесь использованы неравенства (28.9), неравенство $\|u(t,\mu)\| \leqslant v(t,\mu)$, вытекающее из определения $v(t,\mu)$ в (28.7), и тот факт, что $v(t,\mu)$ – неубывающая функция t. Из (29.11) получим

$$v(t,\mu) \leqslant a(t,\mu)v^2(t,\mu) + b(t,\mu)v(t,\mu) + c(t,\mu). \tag{29.12}$$

Неравенство (29.12) справедливо на множестве (29.1). Перепишем его в виде

$$av^2 - (1-b)v + c \geqslant 0. \tag{29.13}$$

Левая часть обращается в ноль при $v = v_1$, $v = v_2$, где

$$v_{1,2} \equiv \frac{1 - b \mp \sqrt{(1-b)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2c}{1 - b \pm \sqrt{(1-b)^2 - 4ac}}.$$

Рассмотрим множество (28.11) значений t, μ. Оно не пусто, так как a, b, c непрерывны по t при $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \widetilde{\mu}$; $\quad a(0,\mu) = c(0,\mu) = 0$;

$$b(0,\mu) = \max_{i=\overline{1,m-1}} \sum_{l=i+1}^{m} \mu^{K_l - K_i} \|P_{il*}(0,\mu)\|;$$

$b(0,\mu)$ непрерывна по μ при $0 \leqslant \mu \leqslant \widetilde{\mu}$; $b(0,0) = 0$. На (28.11) множество неотрицательных значений v, удовлетворяющих (29.13), распадается на две непересекающиеся компоненты $0 \leqslant v \leqslant v_1$ и $v \geqslant v_2$. Так как $v(0,\mu) = 0$ и $v(t,\mu)$ непрерывна по t, то для всех t, μ из множества (28.11) при условии $0 \leqslant t \leqslant t_1(\mu)$ справедливы неравенства

$$\|u(t,\mu)\| \leqslant v(t,\mu) \leqslant v_1(t,\mu) = \frac{2c(t,\mu)}{p(t,\mu) + \sqrt{q(t,\mu)}}. \tag{29.14}$$

Предположим, что (28.11) содержит такую точку (t_2,μ), что $t_{1*} \equiv t_1(\mu) < t_2$. Тогда: 1) (28.11) содержит все точки (s,μ), где $0 \leqslant s \leqslant t_{1*}$, так как a, b, c неубывающие функции t; 2) $\|u(t_{1*},\mu)\| = \delta$, так как иначе решение задачи (28.6) можно было бы продолжить [4]. Отсюда и из (28.11), (29.14) получим

$$\delta = \|u(t_{1*},\mu)\| \leqslant \frac{2c(t_{1*},\mu)}{p(t_{1*},\mu) + \sqrt{q(t_{1*},\mu)}} < \delta.$$

Пришли к противоречию, из которого следует, что решение задачи (28.6) существует для всех значений t, μ из множества (28.11). Решение единственно и удовлетворяет неравенству (29.14). Теорема доказана.

§ 30. Теоремы о предельном переходе

Сформулируем теоремы о пределе решения задачи Тихонова при стремлении малого параметра к нулю.

Теорема 30.1. (*Тихонова* [43]). *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_2, ..., κ_m, C_2, ..., C_m, T, *что при* $n = 0$, $D_t = \{t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$ *выполняются условия* 26.1–26.8. *Тогда:*

1) *найдется* $\mu_* > 0$, *не зависящая от* t, μ *и такая, что решение задачи* (22.1) *существует и единственно при* $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$;
2)
$$\lim_{\mu\to 0+0} x_1(t,\mu) = \bar{x}_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$\lim_{\mu\to 0+0} x_j(t,\mu) = \bar{x}_j(t), \quad 0 < t \leqslant T, \quad j = \overline{2,m};$$
3) $x_1(t,\mu) \to \bar{x}_1(t)$ *равномерно на множестве* $0 \leqslant t \leqslant T$; *для* $j = \overline{2,m}$ *и любого* t_1, $0 < t_1 < T$, $x_j(t,\mu) \to \bar{x}_j(t)$ *равномерно на множестве* $t_1 \leqslant t \leqslant T$.

Теорема 30.2. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}, \kappa_1, \ldots, \kappa_m, C_1, \ldots, C_m$, *что при* $n = 0$, $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 26.1–26.8 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t,s)\| \leqslant C_1 \exp\{-\kappa_1(t-s)\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t.$$

Тогда:

1) *найдется* $\mu_* > 0$, *не зависящая от* t, μ *и такая, что решение задачи* (22.1) *существует и единственно при* $t \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$;
2)
$$\lim_{\mu\to 0+0} x_1(t,\mu) = \bar{x}_1(t), \quad t \geqslant 0,$$
$$\lim_{\mu\to 0+0} x_j(t,\mu) = \bar{x}_j(t), \quad t > 0, \quad j = \overline{2,m};$$
3) $x_1(t,\mu) \to \bar{x}_1(t)$ *равномерно на множестве* $t \geqslant 0$; *для* $j = \overline{2,m}$ *и любого* t_1, $t_1 > 0$, $x_j(t,\mu) \to \bar{x}_j(t)$ *равномерно на множестве* $t \geqslant t_1$.

Отметим, что при выполнении условия 26.1 $\bar{x}(t) = 0$ $\Big(\bar{x}(t)$ — решение вырожденной задачи (22.2), $\bar{x}(t) = y_1^{(0)}(t)$, $y_1^{(0)}(t)$ — коэффициент в асимптотике (23.2)$\Big)$.

Доказательство теорем 30.1, 30.2. Первое утверждение теорем 30.1, 30.2 следует из теорем 28.1, 28.2, так как условия теорем при $n = 0$ совпадают. В § 33 доказано, что при выполнении условий 26.1, 26.2, 26.4–26.7 справедливы соотношения

$$\|y_j^{(0)}(\tau_j)\| \leqslant C \exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\}, \quad \tau_j \geqslant 0, \quad j = \overline{2,m}.$$

По формулам (24.2) $y_{j1}^{(0)}(\tau_j) = 0$, $j = \overline{2,m}$; по условию 26.5 $y_1^{(0)}(\tau_1) = 0$. Отсюда и из (28.1) следует:

$$\|x_1(t,\mu)\|\leqslant\|x_1(t,\mu)-X_{01}(t,\mu)\|+\|X_{01}(t,\mu)\|\leqslant$$
$$\leqslant\|x(t,\mu)-X_0(t,\mu)\|+\|\sum_{j=1}^{m}y_{j1}^{(0)}(\tau_j)\|=\|x(t,\mu)-X_0(t,\mu)\|,$$
$$\|x_j(t,\mu)\|\leqslant\|x(t,\mu)\|\leqslant\|x(t,\mu)-X_0(t,\mu)\|+\|X_0(t,\mu)\|\leqslant$$
$$\leqslant\|x(t,\mu)-X_0(t,\mu)\|+\|\sum_{j=1}^{m}y_j^{(0)}(\tau_j)\|\leqslant \tag{30.1}$$
$$\leqslant\|x(t,\mu)-X_0(t,\mu)\|+\sum_{j=2}^{m}C\exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\}\leqslant$$
$$\leqslant\|x(t,\mu)-X_0(t,\mu)\|+C\exp\{-\kappa_{02}t\mu^{-K_2}\},\quad 0<\mu\leqslant\bar{\mu}_*,$$
$$j=\overline{2,m}.$$

Здесь $\bar{\mu}_*=\mu_*$ при $m=2$. При $m>2$ $\bar{\mu}_*=\min(\mu_*,\mu_3,\ldots,\mu_m)$, где μ_j – корень уравнения $\kappa_{0j}-\kappa_{02}\mu^{K_j-K_2}=0$. Из (30.1) и из теорем 28.1, 28.2 получаем

$$\|x_1(t,\mu)\|\leqslant C_*\mu,\quad \|x_j(t,\mu)\|\leqslant C_*\mu+C\exp\{-\kappa_{02}t\mu^{-K_2}\}. \tag{30.2}$$

Для теоремы 30.1 эти неравенства справедливы при $0\leqslant t\leqslant T$, $0<\mu\leqslant\bar{\mu}_*$. Для теоремы 30.2 неравенства справедливы при $t\geqslant 0$, $0<\mu\leqslant\bar{\mu}_*$. Так как постоянные C_*, C, κ_{02} не зависят от t, μ, $\exp\{-\kappa_{02}t\mu^{-K_2}\}\leqslant\exp\{-\kappa_{02}t_1\mu^{-K_2}\}$ при $t\geqslant t_1$, так как $\bar{x}(t)=y_1^{(0)}(t)=0$, то из (30.2) следуют утверждения 2, 3. □

Из определения 22.3 задачи Тихонова и из теорем 30.1, 30.2 получаем

Следствие 30.1. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_2, ..., κ_m, C_2, ..., C_m, T, *что при* $n=0$, $D_t=\{t: 0\leqslant t\leqslant T\}$ *выполняются условия* 26.1–26.8. *Тогда найдется такое* $\bar{\mu}_*>0$, *что* (22.1) *является задачей Тихонова на множестве* $0\leqslant t\leqslant T$, $0<\mu\leqslant\bar{\mu}_*$.

Следствие 30.2. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_1, ..., κ_m, C_1, ..., C_m, *что при* $n=0$, $D_t=\{t: t\geqslant 0\}$ *выполняются условия* 26.1–26.8 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t,s)\|\leqslant C_1\exp\{-\kappa_1(t-s)\},\quad 0\leqslant s\leqslant t.$$

Тогда найдется такое $\bar{\mu}_*>0$, *что* (22.1) *является задачей Тихонова на множестве* $t\geqslant 0$, $0<\mu\leqslant\bar{\mu}_*$.

Следствие 30.3. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_2, ..., κ_m, C_1, ..., C_m *и постоянные* $\kappa_1\geqslant 0$, $C_1^\circ\geqslant 0$, *что при* $n=0$, $D_t=\{t: t\geqslant 0\}$ *выполняются условия* 26.1–26.8 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t,s)\|\leqslant C_1^\circ(t-s)^{\kappa_1}+C_1,\quad 0\leqslant s\leqslant t.$$

Тогда для любых значений $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < [2(\kappa_1+1)]^{-1}$, *найдется такое* $\bar{\mu}_* > 0$, *что* (22.1) *является задачей Тихонова на множестве* $0 \leqslant t \leqslant T\mu^{-\chi}$, $0 < \mu \leqslant \bar{\mu}_*$.

Доказательство. Существование решения задачи (22.1) следует из теоремы 28.3. Из (30.1) и из теоремы 28.3 получим неравенства

$$\begin{gathered}
\|x_1(t,\mu)\| \leqslant \|x(t,\mu) - X_0(t,\mu)\| \leqslant \mu(C_*^\circ t^{\kappa_1+1} + C_*) \leqslant \\
\leqslant C_*^\circ T^{\kappa_1+1}\mu^{1-\chi(\kappa_1+1)} + C_*\mu < C^\circ\sqrt{\mu}, \\
\|x_j(t,\mu)\| \leqslant \|x(t,\mu) - X_0(t,\mu)\| + C\exp\left\{-\kappa_{02}t\mu^{-K_2}\right\} < \\
< C^\circ\sqrt{\mu} + C\exp\left\{-\kappa_{02}t\mu^{-K_2}\right\}, \\
0 \leqslant t \leqslant T\mu^{-\chi}, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\mu}_*, \quad j = \overline{2,m}.
\end{gathered}$$

Отсюда следует, что $x(t,\mu) \to \bar{x}(t) = 0$ при $t > 0$, $\mu \to 0+0$. □

Следствие 30.4. . *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_1, ..., κ_m, C_1, ..., C_m, *что при* $n = 0$, $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 26.1–26.8 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t,s)\| \leqslant C_1\exp\left\{\kappa_1(t-s)\right\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t.$$

Тогда для любых значений $T \geqslant 0$, χ, $0 \leqslant \chi < (2\kappa_1)^{-1}$, *найдется такое* $\bar{\mu}_* > 0$, *что* (22.1) *является задачей Тихонова на множестве* $0 \leqslant t \leqslant T - \chi\ln\mu$, $0 < \mu \leqslant \bar{\mu}_*$.

Доказательство. Существование решения задачи (22.1) следует из теоремы 28.4. Из (30.1) и из теоремы 28.4 получим неравенства

$$\begin{gathered}
\|x_1(t,\mu)\| \leqslant \|x(t,\mu) - X_0(t,\mu)\| \leqslant C_*\mu\exp\left\{\kappa_1 t\right\} \leqslant \\
\leqslant C_*\exp\left\{\kappa_1 T\right\}\mu^{1-\kappa_1\chi} < C^\circ\sqrt{\mu}, \\
\|x_j(t,\mu)\| \leqslant \|x(t,\mu) - X_0(t,\mu)\| + C\exp\left\{-\kappa_{02}t\mu^{-K_2}\right\} < \\
< C^\circ\sqrt{\mu} + C\exp\left\{-\kappa_{02}t\mu^{-K_2}\right\}, \\
0 \leqslant t \leqslant T - \chi\ln\mu, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\mu}_*, \quad j = \overline{2,m}.
\end{gathered}$$

Отсюда следует, что $x(t,\mu) \to \bar{x}(t) = 0$ при $t > 0$, $\mu \to 0+0$. □

Замечание 30.1. При $m = 2$ условия 26.1–26.8 эквивалентны условиям 27.1–27.8.

Замечание 30.2. В теореме Градштейна [13] сформулированы условия, при которых задача (22.1) для $m = 2$, $K_2 = 1$ имеет решение на полуоси $t \geqslant 0$. Экспоненциальная оценка, которая при этом приводится, ошибочна. Это показывает следующий пример:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + \mu, \quad \mu\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + \mu, \quad x_1|_{t=0} = 0, \quad x_2|_{t=0} = x_2^\circ. \tag{30.3}$$

Решение имеет вид

$$x_1 = \mu\left(1 - e^{-t}\right), \quad x_2 = \mu + (x_2^\circ - \mu)e^{-t/\mu}. \tag{30.4}$$

Задача (30.3) удовлетворяет условиям теоремы Градштейна [13], однако норма решения (30.4) не убывает экспоненциально со временем. При выполнении условий теоремы 30.2 для решения задачи (22.1) справедлива оценка (30.2) на полуоси $t \geqslant 0$.

Замечание 30.3. В [16] исследуется устойчивость нулевого решения сингулярно возмущенных уравнений с разными малыми параметрами.

В теореме Климушева — Красовского [22] сформулированы условия, при которых решение задачи (22.1) для $m = 2$, $K_2 = 1$ существует на полуоси $t \geqslant 0$ и равномерно асимптотически устойчиво относительно начальных возмущений (малых — для x_1, любых — для x_2). Указывается, что выбором значений μ норму $|x - \bar{x}(t)|$ можно сделать сколь угодно малой на всей полуоси за исключением пограничного слоя.

В теореме Маркечко [34] сформулированы условия, при которых автономная задача (22.1) для $m = 2$, $K_2 = 1$ имеет стационарное решение, равномерно асимптотически устойчивое. Это решение стремится к стационарному решению вырожденной задачи при $\mu \to 0$.

В теореме Разумихина [40] сформулированы условия, при которых асимптотически устойчиво нулевое решение дифференциальных уравнений (22.1) линейных и однородных по x, в случае $m = 2$, $K_2 = 1$.

В теореме 24.1 в [42] сформулированы условия, при которых решение задачи (22.1) для $m = 2$, $K_2 = 1$ существует на всей полуоси, дана оценка решения.

Замечание 30.4. Теоремы о предельном переходе использовались при доказательстве корректности многих моделей в теоретической механике, например:

- абсолютно твердое тело (голономная связь) как предел системы материальных точек при увеличении до бесконечности коэффициентов жесткости упругих связей [37, 45];
- отсутствие проскальзывания между телами (неголономная связь) как предельная ситуация при увеличении до бесконечности характеристик тех или иных сил взаимодействия тел [20, 24, 37];
- прецессионная модель движения гироскопических систем как предел уравнений движения при стремлении к нулю отношения нутационной и прецессионной постоянных времени системы [23, 37].

Прецессионная модель движения гироскопа в кардановом подвесе рассмотрена в замечании 49.2. Теоремы о предельном переходе используются при построении приближенных моделей движения самолета, автомобиля [5, 37].

§ 31. Примеры применения метода пограничных функций

Пример 31.1.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1, \quad x_1|_{t=0} = x_1^\circ, \tag{31.1}$$

$$\mu\frac{dx_2}{dt} = -x_2, \quad x_2|_{t=0} = x_2^\circ.$$

Задача имеет решение

$$x_1 = x_1^\circ e^t, \quad x_2 = x_2^\circ e^{-t/\mu} \tag{31.2}$$

при $t \geqslant 0$, $\mu \neq 0$. Вырожденная для (31.1) задача имеет вид

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \bar{x}_1, \quad \bar{x}_1(0) = x_1^\circ, \quad \bar{x}_2 = 0.$$

Решение вырожденной задачи

$$\bar{x}_1 = x_1^\circ e^t, \quad \bar{x}_2 = 0. \tag{31.3}$$

Из (31.2), (31.3) следует, что (31.1) — задача Тихонова на множестве $D_{t\mu} = \Big\{(t, \mu)\colon t \geqslant 0, \mu > 0\Big\}$. Если вместо x_1 ввести переменную $\Delta x_1 \equiv x_1 - x_1^\circ e^t$, то задача будет удовлетворять условиям теорем 28.1, 28.4, 30.1.

Пример 31.2.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1, \qquad & x_1\big|_{t=0} &= x_1^\circ, \\ \mu\frac{dx_2}{dt} &= 1, \qquad & x_2\big|_{t=0} &= x_2^\circ. \end{aligned} \tag{31.4}$$

Решение этих уравнений равно

$$x_1 = x_1^\circ e^t, \quad x_2 = \frac{t}{\mu} + x_2^\circ, \quad t \geqslant 0, \quad \mu \neq 0.$$

Вырожденная задача

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \bar{x}_1, \quad \bar{x}_1(0) = x_1^\circ, \quad 1 = 0$$

не имеет решения. Поэтому (31.4) не является задачей Тихонова ни на каком множестве $D_{t\mu}$.

Пример 31.3.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1, \qquad & x_1\big|_{t=0} &= x_1^\circ, \\ \mu\frac{dx_2}{dt} &= x_2, \qquad & x_2\big|_{t=0} &= x_2^\circ. \end{aligned} \tag{31.5}$$

Решение этой задачи равно

$$x_1 = x_1^\circ e^t, \quad x_2 = x_2^\circ e^{t/\mu}, \quad t \geqslant 0, \quad \mu \neq 0.$$

Вырожденная задача

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \bar{x}_1, \quad \bar{x}_1(0) = x_1^\circ, \quad \bar{x}_2 = 0$$

имеет решение

$$\bar{x}_1 = x_1^\circ e^t, \quad \bar{x}_2 = 0.$$

Для любого $t_* > 0$ при $x_2^\circ \neq 0$

$$\operatorname{sign}(x_2^\circ) \cdot \lim_{\mu \to 0+0} x_2(t_*, \mu) = \infty \neq 0 = \bar{x}_2.$$

Поэтому задача (31.5) не является задачей Тихонова ни на каком множестве $D_{t\mu}$ при $x_2^\circ \neq 0$.

Пример 31.4.

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = 0, && x_1|_{t=0} = 0, \\ &\mu\frac{dx_2}{dt} = -\sin x_2, && x_2|_{t=0} = x_2^\circ. \end{aligned} \tag{31.6}$$

Вырожденная задача имеет вид

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = 0, \quad \bar{x}_1(0) = 0, \quad \sin\bar{x}_2 = 0. \tag{31.7}$$

Ее решение равно

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = l\pi, \quad l = 0, \pm 1, \ldots$$

Решение задачи (31.6) описывается формулами

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2\,\mathrm{arctg}\left[\mathrm{tg}\,\frac{x_2^\circ}{2}\cdot e^{-t/\mu}\right], \quad t \geqslant 0, \quad \mu > 0.$$

При $t > 0$, $\mu \to 0$ $\quad x(t,\mu) \to 0$. Задача (31.7) имеет нулевое решение при $l = 0$. Поэтому (31.6) — задача Тихонова на множестве $t \geqslant 0$, $\mu > 0$. Если $|x_2^\circ| < \pi/2$, то задача (31.6) удовлетворяет условиям теорем 28.1, 28.3, 28.4, 30.1.

Пример 31.5.

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2, && x_1|_{t=0} = 0, \\ &\mu\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + x_3^2, && x_2|_{t=0} = 0, \\ &\mu^2\frac{dx_3}{dt} = -x_3, && x_3|_{t=0} = 1. \end{aligned} \tag{31.8}$$

Для задачи (31.8) справедливы равенства (обозначения смотрите в § 23–§ 26,

$$y_1^{(0)} = 0, \quad y_2^{(0)} = 0, \quad y_3^{(0)}(\tau_3) = \left(0, 0, e^{-\tau_3}\right),$$

$$\widetilde{y}_2^{(0)} = \left(0, y_{22}^{(0)}, 0\right), \quad \bar{\varphi}_{023}\left(y_{22}^{(0)}\right) = 0,$$

$$D_x^{(0)} = \left\{x\colon x_1 = 0, x_2 = 0, 0 \leqslant x_3 \leqslant 1\right\},$$

$$A_1(x,t,\mu) = 1, \quad A_2(x,t,\mu) = -1, \quad A_3(x,t,\mu) = -1,$$

$$U_1(t,s) = e^{t-s}, \quad U_2(t,s,\mu) = \exp\left\{-\frac{t-s}{\mu}\right\},$$

$$U_3(t,s,\mu) = \exp\left\{-\frac{t-s}{\mu^2}\right\},$$

$$H_1(x,t,\mu) = \begin{pmatrix} -1 & -2x_3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_2(x,t,\mu) = -1.$$

Присоединенное уравнение 2-го порядка имеет вид

$$\frac{dr_2}{d\tau_2} = -r_2.$$

Присоединенное уравнение 1-го порядка имеет вид

$$\frac{dr_3}{d\tau_3} = -r_3.$$

Нетрудно проверить, что задача (31.8) удовлетворяет условиям теорем 28.1, 28.4, 30.1. Неравенства (28.3), (28.4) для (31.8) не выполняются, поэтому теоремы 28.2, 28.3, 30.2 не применимы.

Из теоремы 28.4 следует, что для любых значений $n \geqslant 0$, $T \geqslant 0$, χ, $0 \leqslant \chi < (n+1)(n+2)^{-1}$, найдутся $\mu_* > 0$, C_*, не зависящие от t, μ и такие, что решение задачи (31.8) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|x(t,\mu) - X_n(t,\mu)\| \leqslant C_* \mu^{n+1} e^{(n+1)t}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T - \chi \ln \mu$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$. Теорема 28.1 слабее теоремы 28.4, поэтому ее не рассматриваем.

Точное решение задачи (31.8) при $t \geqslant 0$, $0 < \mu < 2$ задается формулами

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\mu^2 e^t}{(1+\mu)(2+\mu^2)} - \frac{\mu^2 \exp\left\{-t\mu^{-1}\right\}}{(1+\mu)(2-\mu)} + \frac{\mu^3 \exp\left\{-2t\mu^{-2}\right\}}{(2-\mu)(2+\mu^2)}, \\ x_2 &= \frac{\mu}{(2-\mu)}\left[\exp\left\{-\frac{t}{\mu}\right\} - \exp\left\{-\frac{2t}{\mu^2}\right\}\right], \quad x_3 = \exp\left\{-\frac{t}{\mu^2}\right\}. \end{aligned} \tag{31.9}$$

Асимптотическое решение задачи (31.8) имеет вид

$$x(t,\mu) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \exp\left\{-t\mu^{-2}\right\} \end{pmatrix} + \frac{\mu}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \exp\left\{-t\mu^{-1}\right\} - \exp\left\{-2t\mu^{-2}\right\} \\ 0 \end{pmatrix} + \\ + \frac{\mu^2}{4}\begin{pmatrix} 2e^t - 2\exp\{-t\mu^{-1}\} \\ \exp\{-t\mu^{-1}\} - \exp\{-2t\mu^{-2}\} \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=3}^{\infty}\sum_{j=1}^{3} y_j^{(k)}(\tau_j)\mu^k.$$

Остаточные члены асимптотики нулевого, первого и второго порядков равны соответственно

$$x(t,\mu) - X_0(t,\mu) = \frac{\mu^2 e^t}{(1+\mu)(2+\mu^2)}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\mu \exp\{-t\mu^{-1}\}}{(1+\mu)(2-\mu)}\begin{pmatrix} -\mu \\ 1+\mu \\ 0 \end{pmatrix} + \\ + \frac{\mu \exp\{-2t\mu^{-2}\}}{(2-\mu)(2+\mu^2)}\begin{pmatrix} \mu^2 \\ -2-\mu^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x(t,\mu) - X_1(t,\mu) = \frac{\mu^2 e^t}{(1+\mu)(2+\mu^2)}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ + \frac{\mu^2 \exp\{-t\mu^{-1}\}}{2(1+\mu)(2-\mu)}\begin{pmatrix} -2 \\ 1+\mu \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\mu^2 \exp\{-2t\mu^{-2}\}}{2(2-\mu)(2+\mu^2)}\begin{pmatrix} 2\mu \\ -2-\mu^2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x(t,\mu) - X_2(t,\mu) = -\frac{\mu^3(2+\mu+\mu^2)e^t}{2(1+\mu)(2+\mu^2)}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{\mu^3\exp\{-t\mu^{-1}\}}{4(1+\mu)(2-\mu)}\begin{pmatrix}2-2\mu\\1+\mu\\0\end{pmatrix}+\frac{\mu^3\exp\{-2t\mu^{-2}\}}{4(2-\mu)(2+\mu^2)}\begin{pmatrix}4\\-2-\mu^2\\0\end{pmatrix}.$$

Выпишем пограничные функции

$$y_2(\tau_2,\mu)\sim\frac{\mu e^{-\tau_2}}{4}\begin{pmatrix}-2\mu\\2+\mu\\0\end{pmatrix}+\sum_{k=3}^{\infty}y_2^{(k)}(\tau_2)\mu^k,$$

$$y_3(\tau_3,\mu)\sim e^{-\tau_3}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{\mu e^{-2\tau_3}}{4}\begin{pmatrix}0\\2+\mu\\0\end{pmatrix}+\sum_{k=3}^{\infty}y_3^{(k)}(\tau_3)\mu^k.$$

Вырожденная для (31.8) задача имеет вид

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt}=\bar{x}_1+\bar{x}_2,\quad \bar{x}_1(0)=0,\quad \bar{x}_2-\bar{x}_3^2=0,\quad \bar{x}_3=0.$$

Ее решение единственно: $\bar{x}=0$. Отсюда и из (31.9) следует, что (31.8) — задача Тихонова на множестве $t\geqslant 0$, $0<\mu<2$. Утверждения теоремы Тихонова 30.1 для задачи (31.8) очевидны.

Пример 31.6.

$$\begin{aligned}&\frac{dx_1}{dt}=-\frac{x_2}{1+e^t},\quad x_1|_{t=0}=0,\\&\mu\frac{dx_2}{dt}=-x_2+e^t(x_1+\mu),\quad x_2|_{t=0}=2.\end{aligned}\tag{31.10}$$

Для задачи (31.10) справедливы равенства (обозначения смотрите в § 23–§ 27)

$$y_1^{(0)}=0,\quad y_2^{(0)}(\tau)=\left(0{,}2e^{-\tau}\right),\quad A_2=-1,$$

$$U_2(t,s,\mu)=e^{-(t-s)/\mu},\quad H_1=-1,\quad A_{2*}=-1.$$

Присоединенное уравнение имеет вид

$$dr_2/d\tau=-r_2.$$

Нетрудно проверить, что задача (31.10) удовлетворяет условиям теорем 28.1, 30.1 при $\kappa_2=C_2=1$ и любых n, $\bar{\mu}$, T. Из этой теоремы следует: для любых значений $T>0, n\geqslant 0$ найдутся $C_*,\mu_*>0$, не зависящие от t,μ и такие, что решение задачи (31.10) существует, единственно и удовлетворяет неравенству (28.2) при $0\leqslant t\leqslant T$, $0<\mu\leqslant\mu_*$. Задача (31.10) не удовлетворяет условию 26.2 на множестве $t\geqslant 0$. Поэтому теоремы 28.2–28.4, 30.2 не применимы. Решение задачи (31.10) имеет вид

$$x_1=\mu\left(e^{-\tau}-1\right),\quad x_2=e^{-\tau}\left(1+e^t\right),\quad \tau=t/\mu.\tag{31.11}$$

Оно существует при $t\geqslant 0, \mu>0$. Асимптотическое решение, построенное методом пограничных функций, имеет вид

$$\begin{aligned}&x_1(t,\mu)\sim\mu\left(e^{-\tau}-1\right),\\&x_2(t,\mu)\sim 2e^{-\tau}+e^{-\tau}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\tau\mu)^k}{k!}.\end{aligned}\tag{31.12}$$

Остаточные члены асимптотики равны соответственно

$$x_1 - X_{01} = \mu\left(e^{-\tau} - 1\right); \quad x_1 - X_{n1} = 0, \quad n \geqslant 1;$$
$$x_2 - X_{n2} = e^{-\tau} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\tau\mu)^k}{k!}, \quad n \geqslant 0. \tag{31.13}$$

Здесь $X_n = (X_{n1}, X_{n2})$ — n-е приближение решения. Справедливы неравенства

$$|x_2 - X_{n2}| = e^{-\tau}(\tau\mu)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tau\mu)^k}{(n+1+k)!} \leqslant$$
$$\leqslant e^{t-\tau}(\tau\mu)^{n+1} \leqslant e^T \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \mu^{n+1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Отсюда и из (31.13) следует, что (31.12) является асимптотическим решением задачи (31.10) на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ при $\mu \to 0$. При этом

$$x(t, \mu) = X_n(t, \mu) + O(\mu^{n+1}), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \mu \to 0.$$

За $\mu_* > 0$ можно принять любое число.

Вырожденная для (31.10) задача имеет вид

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = -\frac{\bar{x}_2}{1+e^t}, \quad \bar{x}_1(0) = 0, \quad \bar{x}_2 - e^t\bar{x}_1 = 0.$$

Ее решение равно нулю: $\bar{x} = 0$. Отсюда и из (31.11) следует, что (31.10) является задачей Тихонова на множестве $t \geqslant 0$, $\mu > 0$. Утверждения теоремы 30.1 очевидны.

Пример 31.7.

$$\frac{dx_1}{dt} = (x_1 + \mu)(x_1 + \mu - 1), \quad x_1|_{t=0} = 0,$$
$$\mu\frac{dx_2}{dt} = -x_2, \quad x_2|_{t=0} = 1. \tag{31.14}$$

Для задачи (31.14) справедливы равенства (обозначения смотрите в § 23 — § 27)

$$y_1^{(0)} = 0, \quad y_2^{(0)}(\tau) = (0, e^{-\tau}), \quad A_1(0, t, 0) = -1, \quad A_2 = -1,$$
$$U_1(t, s) = e^{-t+s}, \quad U_2(t, s, \mu) = \exp\left\{-\frac{t-s}{\mu}\right\}, \quad H_1 = -1, \quad A_{2*} = -1.$$

Присоединенное уравнение имеет вид

$$\frac{dr_2}{d\tau} = -r_2.$$

Нетрудно проверить, что задача (31.14) удовлетворяет условиям теорем 28.1–28.4, 30.1, 30.2. Из теоремы 28.2 следует, что для любого значения $n \geqslant 0$ найдутся C_*, $\mu_* > 0$, не зависящие от t, μ и такие, что решение задачи (31.14) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|x(t, \mu) - X_n(t, \mu)\| \leqslant C_*\mu^{n+1} \tag{31.15}$$

при $t \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$. Теоремы 28.1, 28.3, 28.4 слабее теоремы 28.2, поэтому их не рассматриваем.

Решение задачи (31.14) описывается формулами

$$x_1 = \frac{\mu(\mu-1)(1-e^{-t})}{1-\mu+\mu e^{-t}}, \quad x_2 = \exp\left\{-\frac{t}{\mu}\right\}. \tag{31.16}$$

Оно существует при $t \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$ и при $0 \leqslant t < \ln[\mu/(\mu-1)]$, $\mu > 1$. Асимптотическое решение, построенное методом пограничных функций, имеет вид

$$X_{n1}(t,\mu) = \mu(e^{-t}-1)_{(n\geqslant 1)} + \sum_{k=2}^{n} \mu^k e^{-t}(1-e^{-t})^{k-1}{}_{(n\geqslant 2)},$$
$$X_{n2}(t,\mu) = \exp\left\{-\frac{t}{\mu}\right\}. \tag{31.17}$$

Остаточные члены асимптотики равны соответственно

$$x(t,\mu) - X_0(t,\mu) = \frac{\mu(\mu-1)(1-e^{-t})}{1-\mu+\mu e^{-t}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$
$$x(t,\mu) - X_n(t,\mu) = \frac{\mu^{n+1}e^{-t}(1-e^{-t})^n}{1-\mu+\mu e^{-t}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad n \geqslant 1. \tag{31.18}$$

Правые части ограничены по модулю функцией $C_*\mu^{n+1}$. Отсюда следует, что (31.17) является асимптотическим решением задачи (31.14) на полуоси $t \geqslant 0$ при $\mu \to 0$. При этом

$$x(t,\mu) = X_n(t,\mu) + O(\mu^{n+1}), \quad t \geqslant 0, \quad \mu \to 0.$$

Из формул (31.18) следует, что для теоремы 28.1 за T, μ_* можно принять любые числа из множества $T > 0$, $0 < \mu_* < (1-e^{-T})^{-1}$. Для теоремы 28.2 за μ_* можно принять любое число из интервала $0 < \mu_* < 1$.

Вырожденная для (31.14) задача имеет вид

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \bar{x}_1(\bar{x}_1 - 1), \quad \bar{x}_1(0) = 0, \quad \bar{x}_2 = 0.$$

Ее решение равно нулю: $\bar{x} = 0$. Отсюда и из (31.16) следует, что (31.14) является задачей Тихонова на множестве $t \geqslant 0$, $0 < \mu < 1$. Отметим, что утверждения предельных теорем 30.1, 30.2 для задачи (31.14) очевидны.

Пример 31.8.

$$\frac{dx_1}{dt} = (x_1+\mu)^2, \qquad x_1|_{t=0} = 0,$$
$$\mu\frac{dx_2}{dt} = -x_2, \qquad x_2|_{t=0} = 1. \tag{31.19}$$

Для задачи (31.19) справедливы равенства (обозначения смотрите в § 23 – § 27)

$$y_1^{(0)} = 0, \quad y_2^{(0)}(\tau) = e^{-\tau}, \quad A_1(0,t,0) = 0, \quad A_2 = -1,$$
$$U_1(t,s) = 1, \quad U_2(t,s,\mu) = \exp\left\{-\frac{t-s}{\mu}\right\}, \quad H_1 = -1, \quad A_{2*} = -1.$$

Присоединенное уравнение имеет вид

$$\frac{dr_2}{d\tau} = -r_2.$$

Нетрудно проверить, что задача (31.19) удовлетворяет условиям теорем 28.1, 28.3, 28.4, 30.1. Неравенство (28.3) для (31.19) не выполняется, поэтому теоремы 28.2, 30.2 не применимы.

Из теоремы 28.3 следует: для любых значений $n \geqslant 0$, $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < 1/2$, найдутся $\mu_* > 0$, C_*, $C_*^\circ \geqslant 0$, не зависящие от t, μ и такие, что решение задачи (31.19) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|x(t,\mu) - X_n(t,\mu)\| \leqslant \mu^{n+1}(C_*^\circ t^{2n+1} + C_*)$$

при $0 \leqslant t \leqslant T\mu^{-\chi}$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$. Теоремы 28.1, 28.4 слабее теоремы 28.3, поэтому их не рассматриваем. Решение задачи (31.19) описывается формулами

$$x_1 = \frac{\mu^2 t}{1-\mu t}, \quad x_2 = \exp\left\{-\frac{t}{\mu}\right\}. \tag{31.20}$$

Оно существует при $0 \leqslant t < \mu^{-1}$, $\mu > 0$. Асимптотическое решение, построенное методом пограничных функций, имеет вид

$$x_1(t,\mu) \sim \sum_{k=2}^{\infty} t^{k-1}\mu^k, \quad x_2(t,\mu) \sim \exp\left\{-\frac{t}{\mu}\right\}. \tag{31.21}$$

Остаточный член асимптотики n-го порядка равен

$$x(t,\mu) - X_n(t,\mu) = \frac{\mu^{n+1}t^n}{1-\mu t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad n \geqslant 1.$$

Отсюда следует, что (31.21) — асимптотическое решение задачи (31.19) на множестве $0 \leqslant t \leqslant T\mu^{-\chi}$ при $\mu \to 0$. При этом

$$x(t,\mu) = X_n(t,\mu) + O(\mu^{n(1-\chi)+1}), \quad 0 \leqslant t \leqslant T\mu^{-\chi}, \quad \mu \to 0, \quad n \geqslant 1.$$

Здесь T, χ — произвольные числа, удовлетворяющие неравенствам $T > 0$, $0 \leqslant \chi < 1$. Решение (31.20) существует при $0 \leqslant t \leqslant T\mu^{-\chi}$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$, где μ_* — любое число из интервала $0 < \mu_* < T^{1/(\chi-1)}$. Отметим, что ряд (31.21) не является асимптотическим решением на интервале $0 \leqslant t < \mu^{-1}$, так как

$$\sup_{0 \leqslant t < \mu^{-1}} \|x(t,\mu) - X_n(t,\mu)\| = \infty.$$

Вырожденная для (31.19) задача имеет вид

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \bar{x}_1^2, \quad \bar{x}_1(0) = 0, \quad \bar{x}_2 = 0.$$

Ее решение равно нулю: $\bar{x} = 0$. Отсюда и из (31.20) следует, что (31.19) является задачей Тихонова на множестве $0 \leqslant t < \mu^{-1}$, $\mu > 0$. Утверждения теоремы Тихонова 30.1 для задачи (31.19) очевидны.

Пример 31.9.

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = (x_1 + \mu)(x_1 + \mu + 1), && x_1|_{t=0} = 0, \\ &\mu\frac{dx_2}{dt} = -x_2, && x_2|_{t=0} = 1. \end{aligned} \tag{31.22}$$

Для задачи (31.22) справедливы равенства (обозначения смотрите в § 23–§ 27)

$$y_1^{(0)} = 0, \quad y_2^{(0)}(\tau) = e^{-\tau}, \quad A_1(0,t,0) = 1, \quad A_2 = -1,$$

$$U_1(t,s)=e^{t-s},\quad U_2(t,s,\mu)=\exp\left\{-\frac{t-s}{\mu}\right\},\quad H_1=-1,\quad A_{2*}=-1.$$

Присоединенное уравнение имеет вид

$$\frac{dr_2}{d\tau}=-r_2.$$

Нетрудно проверить, что задача (31.22) удовлетворяет условиям теорем 28.1, 28.4, 30.1. Неравенства (28.3), (28.4) для (31.22) не выполняются, поэтому теоремы 28.2, 28.3, 30.2 не применимы.

Из теоремы 28.4 следует, что для любых значений $n\geqslant 0$, $T\geqslant 0$, χ, $0\leqslant\chi<(n+1)(n+2)^{-1}$, найдутся $\mu_*>0$, C_*, не зависящие от t, μ и такие, что решение задачи (31.22) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|x(t,\mu)-X_n(t,\mu)\|\leqslant C_*\mu^{n+1}e^{(n+1)t}$$

при $0\leqslant t\leqslant T-\chi\ln\mu$, $0<\mu\leqslant\mu_*$. Теорема 28.1 слабее теоремы 28.4, поэтому ее не рассматриваем. Решение задачи (31.22) описывается формулами

$$x_1=\frac{\mu(\mu+1)(e^t-1)}{1+\mu-\mu e^t},\quad x_2=\exp\left\{-\frac{t}{\mu}\right\}. \tag{31.23}$$

Оно существует при $0\leqslant t<\ln\left[(1+\mu)\mu^{-1}\right]$, $\mu>0$. Асимптотическое решение, построенное методом пограничных функций, имеет вид

$$\begin{aligned} x_1(t,\mu)&\sim(e^t-1)\mu+\sum_{k=2}^{\infty}(e^t-1)^{k-1}e^t\mu^k,\\ x_2(t,\mu)&\sim\exp\left\{-\frac{t}{\mu}\right\}. \end{aligned}\tag{31.24}$$

Остаточные члены асимптотики равны соответственно

$$x(t,\mu)-X_0(t,\mu)=\frac{\mu(\mu+1)(e^t-1)}{1+\mu-\mu e^t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$x(t,\mu)-X_n(t,\mu)=\frac{\mu^{n+1}(e^t-1)^n e^t}{1+\mu-\mu e^t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad n\geqslant 1.$$

Отсюда следует, что (31.24) является асимптотическим решением задачи (31.22) на множестве $0\leqslant t\leqslant T-\chi\ln\mu$ при $\mu\to 0$. При этом

$$x(t,\mu)=X_n(t,\mu)+O(\mu^{(n+1)(1-\chi)}),\quad 0\leqslant t\leqslant T-\chi\ln\mu,\quad \mu\to 0.$$

Здесь T, χ — произвольные числа, удовлетворяющие неравенствам $T\geqslant 0$, $0\leqslant\chi<1$.

Решение (31.23) существует при $0\leqslant t\leqslant T-\chi\ln\mu$, $0<\mu\leqslant\mu_*$, где $\mu_*=\exp\{T/\chi\}$, если $T<T_*=-\chi\ln\chi-(1-\chi)\ln(1-\chi)$. Если $T\geqslant T_*$, то μ_* — произвольное число из интервала $(0,\mu_1)$, где μ_1 — меньший (из двух) корень уравнения

$$\ln(1+\mu)-(1-\chi)\ln\mu=T.$$

Отметим, что ряд (31.24) не является асимптотическим решением задачи (31.22) на множестве $0 \leqslant t < \ln[(1+\mu)\mu^{-1}]$ при $\mu \to 0$, так как

$$\sup_{0 \leqslant t < \ln[(1+\mu)\mu^{-1}]} \|x(t,\mu) - X_n(t,\mu)\| = \infty.$$

Вырожденная для (31.22) задача имеет вид

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \bar{x}_1 + \bar{x}_1^2, \quad \bar{x}_1(0) = 0, \quad \bar{x}_2 = 0.$$

Ее решение равно нулю: $\bar{x} = 0$. Отсюда и из (31.23) следует, что (31.22) является задачей Тихонова на множестве $0 \leqslant t < \ln[(1+\mu)\mu^{-1}]$, $\mu > 0$. Утверждения теоремы Тихонова 30.1 для задачи (31.22) очевидны.

Пример 31.10.

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2^2, \quad \mu\frac{dx_2}{dt} = -x_2, \quad x_1|_{t=0} = 0, \quad x_2|_{t=0} = 1. \tag{31.25}$$

По методу пограничных функций построим асимптотическое решение задачи (31.25)

$$x_1 \approx X_{01} = 0, \quad x_2 \approx X_{02} = e^{-t/\mu}.$$

$X_0 = (X_{01}, X_{02})$ — нулевое приближение решения задачи (31.25). Обозначим остаточный член через u_1, u_2:

$$u_1 \equiv x_1 - X_{01} = x_1, \quad u_2 \equiv x_2 - X_{02} = x_2 - e^{-t/\mu}. \tag{31.26}$$

Из (31.25), (31.26) получим уравнения для функций u_1, u_2:

$$\begin{aligned} &\frac{du_1}{dt} = -u_1 + \left(u_2 + e^{-t/\mu}\right)^2, \\ &\mu\frac{du_2}{dt} = -u_2, \quad u_i|_{t=0} = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{31.27}$$

Задача (31.25) является задачей типа (28.6), в которой

$$\begin{aligned} &m = 2, \quad K_2 = 1, \quad B_1(t,\mu) = \left(-1, 2e^{-t/\mu}\right), \\ &B_2 = (0, -1), \quad G_1(u,t,\mu) = u_2^2 + e^{-2t/\mu}, \quad G_2 = 0. \end{aligned} \tag{31.28}$$

Рассмотрим неравенства (28.9) для функций (31.28):

$$\|G_1(u,t,\mu) - G_1(\widetilde{u},t,\mu)\| = |u_2^2 - \widetilde{u}_2^2| \leqslant \left(\|u\| + \|\widetilde{u}\|\right)\cdot\|u - \widetilde{u}\|,$$

$$\|G_2(u,t,\mu) - G_2(\widetilde{u},t,\mu)\| = 0.$$

Отсюда и из (28.9) следуют формулы

$$L_{11} = L_{12} = L_{22} = 0, \quad L_{21} = 1. \tag{31.29}$$

Определитель (28.10) для задачи (31.27) равен

$$|B_{22}(t,\mu)| = -1 \neq 0. \tag{31.30}$$

Из (31.28)–(31.30) следует, что условия (28.1)–(28.3) для задачи (31.27) выполняются при любой функции $t_*(\mu) > 0$ и любых значениях $\delta > 0$, $\widetilde{\mu} > 0$. По теореме 28.5 решение задачи (31.27) существует, единственно и удовлетворяет неравенству (28.12) при всех значениях (t,μ) из множества (28.11). Чтобы оценить множество (28.11), вычислим функции (28.7). При этом ограничимся значениями $0 < \mu < 2$. Получим

$$b_{122} = B_{22}^{-1} = -1, \quad B_{11*} = B_{11} - B_{12}b_{122}B_{21} = -1, \quad B_{21*} = B_{21} = 0,$$

$$B_{22*} = B_{22} = -1, \quad P_{12*}(t,\mu) = -B_{12}b_{122} = 2e^{-t/\mu},$$

$$V_1(t,s) = e^{-t+s}, \quad V_2(t,s,\mu) = e^{-(t-s)/\mu}, \quad B_{111} = 0,$$

$$B_{112}(t,s,\mu) = -\mu V_1(t,s)\left[B_{11*}P_{12*}(s,\mu) - \frac{\partial P_{12*}(s,\mu)}{\partial s}\right] = 2(\mu-1)e^{-t+s-s/\mu},$$

$$B_{121} = \mu^{-1}V_2(t,s,\mu)\cdot B_{21*} = 0, \quad B_{122} = 0, \quad P_{111}(t,s) = V_1(t,s) = e^{-t+s},$$

$$P_{112}(t,s,\mu) = V_1(t,s)\cdot P_{12*}(s,\mu) = 2e^{-t+s-s/\mu}, \quad P_{121} = 0,$$

$$P_{122}(t,s,\mu) = \mu^{-1}V_2(t,s,\mu) = \mu^{-1}e^{-(t-s)/\mu},$$

$$B_{221} = \int\limits_s^t B_{121}B_{111}\,dr = 0,$$

$$B_{222} = B_{122} - \mu B_{121}P_{12*}(s,\mu) + \int\limits_s^t B_{121}B_{112}(r,s,\mu)\,dr = 0,$$

$$P_{221} = P_{121} + \int\limits_s^t B_{121}P_{111}(r,s)\,dr = 0,$$

$$P_{222}(t,s,\mu) = P_{122}(t,s,\mu) + \int\limits_s^t B_{121}P_{112}(r,s,\mu)\,dr = \mu^{-1}e^{-(t-s)/\mu},$$

$$a = \max_{0\leqslant s\leqslant t,\quad i=1,2}\int\limits_0^s \sum_{l=1}^{2}\|P_{ii l}(s,r,\mu)\|\cdot L_{2l}\,dr = \max_{0\leqslant s\leqslant t}\int\limits_0^s e^{-s+r}\,dr = 1-e^{-t} \leqslant a_1 \equiv 1,$$

$$b = \max_{0\leqslant s\leqslant t,\quad i=1,2}\Bigg\{\mu\|P_{12*}(s,\mu)\|_{(i=1)} +$$

$$+\int\limits_0^s \sum_{l=1}^{2}\Big[\|B_{iil}(s,r,\mu)\| + \|P_{iil}(s,r,\mu)\|\cdot L_{1l}(r,\mu)\Big]\,dr\Bigg\} =$$

$$= \max_{0\leqslant s\leqslant t}\Big(2\mu e^{-s/\mu} + \int\limits_0^s 2e^{-s+r-r/\mu}|\mu-1|\,dr\Big) = 2\mu,$$

$$c = \max_{0\leqslant s\leqslant t,\quad i=1,2}\int\limits_0^s \sum_{l=1}^{2}\|P_{iil}(s,r,\mu)\cdot G_l(0,r,\mu)\|\,dr =$$

$$= \max_{0\leqslant s\leqslant t}\int\limits_0^s e^{-s+r-2r/\mu}\,dr \leqslant c_1 \equiv \left(\frac{\mu}{2}\right)^{2/(2-\mu)}.$$

Так как δ, $\widetilde{\mu}$, $t_*(\mu)$ произвольны, то из полученных для a, b, c соотношений следует, что множество (28.11) при $0 < \mu < 2$ содержит подмножество

$$p = 1 - 2\mu > 0, \quad q_1 \equiv p^2 - 4c_1 > 0, \quad t \geqslant 0, \quad 0 < \mu < 2, \tag{31.31}$$

на котором справедливо неравенство

$$\|u(t, \mu)\| \leqslant \frac{2c_1(\mu)}{p(\mu) + \sqrt{q_1(\mu)}}. \tag{31.32}$$

Неравенства (31.31) эквивалентны следующим:

$$t \geqslant 0, \quad 0 < \mu < \mu_*, \quad 0{,}213 < \mu_* < 0{,}214. \tag{31.33}$$

Поэтому решение задачи (31.25) существует, единственно и удовлетворяет неравенству (31.32) на множестве (31.33). Для примера рассмотрим $\mu = 0{,}1$. Тогда неравенство (31.32) справедливо при $t \geqslant 0$ и имеет вид

$$\|u(t; 0{,}1)\| \leqslant \delta_*, \quad 0{,}057 < \delta_* < 0{,}058.$$

При $t \geqslant 0$, $0 < \mu < 2$ точное решение задач (31.25), (31.27) равно

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\mu}{2-\mu}\left(e^{-t} - e^{-2t/\mu}\right), & x_2 &= e^{-t/\mu}, \\ u_1 &= \frac{\mu}{2-\mu}\left(e^{-t} - e^{-2t/\mu}\right), & u_2 &= 0. \end{aligned} \tag{31.34}$$

При $t \geqslant 0$, $0 < \mu < 2$ справедлива точная оценка

$$\|u(t, \mu)\| \leqslant c_1(\mu),$$

которая достигается при $t = \mu(2-\mu)^{-1} \ln(2\mu^{-1})$. Для $\mu = 0{,}1$; $t \geqslant 0$ это неравенство эквивалентно

$$\|u(t; 0{,}1)\| \leqslant \delta_{**}, \quad 0{,}042 < \delta_{**} < 0{,}043.$$

Отметим, что для (31.25) вырожденная задача имеет вид

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = -\bar{x}_1 + \bar{x}_2^2, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_1|_{t=0} = 0.$$

Ее решение: $\bar{x} = 0$. Отсюда и из (31.34) следует, что (31.25) — задача Тихонова на множестве $t \geqslant 0$, $\mu > 0$. Задача (31.25) удовлетворяет условиям теорем 28.1–28.4, 30.1, 30.2.

Пример 31.11.

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2^3, \quad \mu\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + \mu x_1 x_2^2, \quad x_i|_{t=0} = x_i^\circ, \quad i = 1, 2. \tag{31.35}$$

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$\Lambda(x) = x_1^2 + x_2^2. \tag{31.36}$$

Производная по времени этой функции в силу системы (31.35) равна

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -\frac{2x_2^2}{\mu} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad \mu > 0.$$

Так как $\Lambda(x) = x_1^2 + x_2^2 \geqslant \|x\|^2$, то при $\|x\| = \delta \quad \Lambda(x) \geqslant \delta^2$. Отсюда следует, что для любых значений $\delta > 0$, $\bar{\mu} > 0$ и $\rho = \delta^2$, $J = N$ задача (31.35) и функция (31.36)

удовлетворяют условиям теоремы 28.6. По теореме 28.6 решение задачи (31.35) существует, единственно и удовлетворяет неравенствам $|x_1| < \delta$, $|x_2| < \delta$ при $t \geqslant 0$, $\mu > 0$. Множество (28.14) описывается неравенствами

$$0 < \mu \leqslant \bar{\mu}, \quad \overset{\circ}{x}{}_1^2 + \overset{\circ}{x}{}_2^2 < \delta^2.$$

Из (28.15) следуют оценки решения задачи (31.35) при $t \geqslant 0$, $\mu > 0$:

$$x_1^2 + x_2^2 \leqslant \overset{\circ}{x}{}_1^2 + \overset{\circ}{x}{}_2^2, \quad |x_1| \leqslant \sqrt{\overset{\circ}{x}{}_1^2 + \overset{\circ}{x}{}_2^2}, \quad |x_2| \leqslant \sqrt{\overset{\circ}{x}{}_1^2 + \overset{\circ}{x}{}_2^2}.$$

Если вместо x_1 ввести переменную $\Delta x_1 \equiv x_1 - \overset{\circ}{x}_1$, то задача будет удовлетворять условиям теорем 28.1, 28.3, 28.4, 30.1.

Замечание 31.1. В 31.2, 31.3 даны примеры сингулярных задач, не являющихся задачами Тихонова. В 31.4 рассматривается задача, которая при вырождении имеет счетное множество решений. В 31.5 рассмотрена задача Тихонова третьего порядка ($m = 3$). В 31.6 дан пример неавтономной задачи Тихонова. В примерах 31.10, 31.11 применяются теоремы 28.5, 28.6 соответственно. Во всех задачах указано, выполняют или нет условия теорем 28.1–28.4, 30.1, 30.2.

§ 32. Выводы главы 3

В главе 3 рассмотрено решение *задачи Тихонова методом пограничных функций*. Определение задачи Тихонова дано в § 22.

В § 23 — § 25 описан метод пограничных функций, совпадающий в случае двух дифференциальных уравнений с первой степенью малого параметра при производной с методом решения Васильевой — Иманалиева. В § 26, § 27 даны условия, налагаемые на рассматриваемую задачу. В § 28 сформулированы теоремы о том, что построенное решение является асимптотическим на отрезке (теорема Васильевой 28.1), на полуоси $t \geqslant 0$ (теорема Бутузова 28.2) и на асимптотически больших интервалах времени (теоремы 28.3, 28.4).

В § 28, кроме того, сформулированы теоремы 28.5, 28.6, позволяющие получать численные оценки: остаточного члена асимптотического разложения решения, интервала времени существования решения и значений малого параметра. Теорема 28.6 аналогична теоремам Ляпунова, Румянцева.

Доказательство теорем 28.1–28.5 дано в § 29 и в главе 4. Доказательство теоремы 28.6 аналогично доказательству теоремы 2.11 в § 7.

В § 30 доказаны теоремы о предельном переходе: при стремлении малого параметра к нулю решение исходной задачи стремится к решению вырожденной задачи на интервале $0 < t \leqslant T$ (теорема Тихонова 30.1) и на полуоси $t > 0$ (теорема 30.2).

Возможности метода пограничных функций демонстрируются на простых примерах в § 31.

Глава 4

Доказательство теорем 28.1–28.4

§ 33. Функции $y_j^{(0)}$

Лемма 33.1. *При выполнении условий* 26.1, 26.2, 26.4–26.7: 1) *функции* $y_j^{(0)}(\tau_j)$ *существуют, единственны и имеют непрерывные производные до* $(n+2)$*-го порядка включительно на полуоси* $\tau_j \geqslant 0$, $j = \overline{2, m}$; 2) *найдутся* C_{0jl}, $\kappa_{0j} > 0$, *не зависящие от* t, μ *и такие, что*

$$\left\| \frac{d^l y_j^{(0)}(\tau_j)}{d\tau_j^l} \right\| \leqslant C_{0jl} e^{-\kappa_{0j}\tau_j}, \quad \tau_j \geqslant 0, \quad j = \overline{2, m}, \quad l = \overline{0, n+2}. \tag{33.1}$$

Отметим, что в условия 26.5–26.7 входят функции $y_j^{(0)}(\tau_j)$, $\widetilde{\varphi}_{0ji}(y_{jj}^{(0)})$. Поэтому формулировать условия 26.5–26.7 нужно после доказательства существования функций $y_j^{(0)}(\tau_j)$, $\widetilde{\varphi}_{0ji}(y_{jj}^{(0)})$. В этой книге доказательство вынесено в § 33 для удобства чтения.

33.1. Доказательство первого утверждения

Доказательство проводится по индукции. Предположим, что при некотором значении j, $2 \leqslant j \leqslant m$, первое утверждение леммы справедливо для функций $y_1^{(0)}(\tau_1)$, ..., $y_{j-1}^{(0)}(\tau_{j-1})$. Тогда точка $\sum\limits_{l=1}^{j-1} y_l^{(0)}(0)$ определена однозначно и по условию 26.7 принадлежит D_x. Из формул (24.2) следует, что

$$y_j^{(0)} = \left(0, \ldots, 0, y_{jj}^{(0)}, \ldots, y_{jm}^{(0)}\right). \tag{33.2}$$

Пусть $m \geqslant 3$ и $j < m$. Тогда из условий 26.2, 26.4 следует, что уравнения (26.5) удовлетворяют условиям теоремы о неявных функциях [3]. По этой теореме найдется такая окрестность нуля D_j, что при $y_{jj}^{(0)} \in D_j$ функции (26.4) существуют, единственны, имеют непрерывные производные до $(n+2)$-го порядка включительно, $\widetilde{y}_j^{(0)} \in D_x$, $\widetilde{\varphi}_{0ji}(0) = 0$, $i = \overline{j+1, m}$. (Отметим, что формулировка условия 26.5б вызвана тем, что решение уравнений (26.5) в общем случае не единственно, и из всех решений выбирается то, которое проходит через ноль (26.6). В окрестности точки (26.6) решение уравнений (26.5) единственно.)

Пусть теперь $m \geqslant 2$. Тогда $y_{jj}^{(0)}(\tau_j)$ является решением задачи Коши (26.2). Из условия 26.2 и из гладкости функций (26.4) следует, что правая часть дифференциального уравнения (26.2) имеет непрерывные производные до $(n+2)$-го порядка включительно при $y_{jj}^{(0)} \in D_j$. Так как $\widetilde{\varphi}_{0ji}(0) = 0$, то из (26.3) следует, что

$$\Phi_j(0) = 0, \quad \left.\frac{d\Phi_j(x_j)}{dx_j}\right|_{x_j=0} = A_{j*}. \tag{33.3}$$

Из условия 26.6а и из теоремы об устойчивости решения по первому приближению [4] следует: нулевое решение уравнения (26.7) асимптотически устойчиво, и значит его область влияния $D_{j*} \neq \varnothing$. По условию 26.6б начальная точка (26.2) принадлежит D_{j*}. Поэтому при $\tau_j \geqslant 0$ решение $y_{jj}^{(0)}(\tau_j)$ задачи (26.2) существует, единственно, имеет непрерывные производные до $(n+2)$-го порядка включительно, $y_{jj}^{(0)}(\tau_j) \in D_j$, $\quad y_{jj}^{(0)}(\tau_j) \to 0$ при $\tau_j \to \infty$.

Если $m \geqslant 3$, то по формуле (24.13) $y_{ji}^{(0)}(\tau_j) = \varphi_{0ji}(\tau_j) \equiv \widetilde{\varphi}_{0ji}\left(y_{jj}^{(0)}(\tau_j)\right)$, $i = \overline{j+1, m}$. Отсюда и из формулы (33.2) следует, что при $\tau_j \geqslant 0$ функция $y_j^{(0)}(\tau_j)$ существует, единственна и имеет непрерывные производные до $(n+2)$-го порядка включительно.

Таким образом, при сделанном предположении получили, что первое утверждение леммы справедливо для функций $y_1^{(0)}(\tau_1)$, ..., $y_j^{(0)}(\tau_j)$. Так как по условию 26.5 $y_1^{(0)}(\tau_1) = 0$, то по индукции первое утверждение леммы справедливо для всех $j = \overline{2, m}$.

33.2. Доказательство второго утверждения

Пусть $\boxed{l = 0}$, $2 \leqslant j \leqslant m$. Запишем дифференциальное уравнение (26.2) в виде

$$\frac{dy_{jj}^{(0)}}{d\tau_j} = A_{j*}y_{jj}^{(0)} + \left[\Phi_j(y_{jj}^{(0)}) - A_{j*}y_{jj}^{(0)}\right].$$

Для любого значения $\tau \geqslant 0$ отсюда следует равенство

$$y_{jj}^{(0)}(\tau_j) = \exp\left\{A_{j*}(\tau_j - \tau)\right\}y_{jj}^{(0)}(\tau) +$$
$$+ \int\limits_{\tau}^{\tau_j} \exp\left\{A_{j*}(\tau_j - \sigma)\right\} \cdot \left[\Phi_j\left(y_{jj}^{(0)}(\sigma)\right) - A_{j*}y_{jj}^{(0)}(\sigma)\right] d\sigma. \tag{33.4}$$

По условию 26.6а собственные числа λ_{js} матрицы A_{j*} отрицательны. Выберем числа κ_{0j}, κ' из множества $0 < \kappa_{0j} < \kappa' < -\max\limits_s \lambda_{js}$. Тогда найдется постоянная $C' \geqslant 1$, не зависящая от t и такая, что

$$\|\exp(A_{j*}t)\| \leqslant C' \exp(-\kappa' t) \tag{33.5}$$

при $t \geqslant 0$ [4]. Из (33.3) следует, что справедливо равенство

$$\Phi_j(x_j) - A_{j*}x_j = \int\limits_0^1 \left[\frac{d\Phi_j(z)}{dz}\bigg|_{z=\theta x_j} - \frac{d\Phi_j(z)}{dz}\bigg|_{z=0} \right] d\theta x_j.$$

Функция $d\Phi_j(x_j)/dx_j$ непрерывна в окрестности $x_j = 0$. Поэтому подынтегральное выражение близко к нулю в окрестности точки $x_j = 0$ и найдется такое значение $\delta_j > 0$, что при $\|x_j\| \leqslant \delta_j$

$$\|\Phi_j(x_j) - A_{j*}x_j\| \leqslant (\kappa' - \kappa_{0j})(C')^{-1}\|x_j\|. \tag{33.6}$$

В п. 33.1 доказано, что при $\tau_j \to \infty$ $y_{jj}^{(0)}(\tau_j) \to 0$. Выберем число $\tau \geqslant 0$ так, чтобы $\|y_{jj}^{(0)}(\tau_j)\| \leqslant \delta_j$ при $\tau_j \geqslant \tau$. Тогда из (33.4)–(33.6) для $\tau_j \geqslant \tau$ следуют неравенства

$$\|y_{jj}^{(0)}(\tau_j)\| \leqslant C' \exp\big\{-\kappa'(\tau_j - \tau)\big\}\|y_{jj}^{(0)}(\tau)\| + \\ + \int\limits_\tau^{\tau_j} \exp\big\{-\kappa'(\tau_j - \sigma)\big\}(\kappa' - \kappa_{0j})\|y_{jj}^{(0)}(\sigma)\| d\sigma,$$

$$\omega(\tau_j) \equiv \|y_{jj}^{(0)}(\tau_j)\| \exp\{\kappa' \tau_j\},$$

$$\omega(\tau_j) \leqslant C' \exp\{\kappa'\tau\}\|y_{jj}^{(0)}(\tau)\| + \int\limits_\tau^{\tau_j} (\kappa' - \kappa_{0j})\omega(\sigma) d\sigma.$$

По лемме Гронуолла—Беллмана 13.1

$$\omega(\tau_j) \leqslant C'\|y_{jj}^{(0)}(\tau)\| \exp\big\{\kappa'\tau + (\kappa' - \kappa_{0j})(\tau_j - \tau)\big\}, \quad \tau_j \geqslant \tau.$$

Отсюда при $\tau_j \geqslant \tau$ получаем неравенство $\|y_{jj}^{(0)}(\tau_j)\| \leqslant C'\|y_{jj}^{(0)}(\tau)\| \cdot \exp\big\{-\kappa_{0j}(\tau_j - \tau)\big\}$.

Так как $y_{jj}^{(0)}(\tau_j)$ — непрерывная функция, то найдется такая постоянная C'', что $\|y_{jj}^{(0)}(\tau_j)\| \leqslant C'' \exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\}$ при $0 \leqslant \tau_j \leqslant \tau$. Таким образом,

$$\begin{gathered} \|y_{jj}^{(0)}(\tau_j)\| \leqslant C \exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\}, \quad \tau_j \geqslant 0, \\ C = \max\big[C'\|y_{jj}^{(0)}(\tau)\| \exp\{\kappa_{0j}\tau\}, C''\big]. \end{gathered} \tag{33.7}$$

При $m \geqslant 3$, $i = \overline{j+1, m}$ из (26.4) и из условия 26.5 следуют равенства

$$y_{ji}^{(0)} = \widetilde{\varphi}_{0ji}(y_{jj}^{(0)}) - \widetilde{\varphi}_{0ji}(0) = \int\limits_0^1 \frac{d\widetilde{\varphi}_{0ji}(x_j)}{dx_j}\bigg|_{x_j = \theta y_{jj}^{(0)}} d\theta y_{jj}^{(0)}.$$

Из гладкости функции $\overline{\varphi}_{0ji}$, из условия 26.7 и из (33.7) следуют неравенства

$$\|y_{ji}^{(0)}(\tau_j)\| \leqslant C\|y_{jj}^{(0)}(\tau_j)\| \leqslant C\exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\},$$

$$\|y_j^{(0)}(\tau_j)\| \leqslant C_{0j0}\exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\}, \quad \tau_j \geqslant 0.$$

Таким образом, неравенство (33.1) при $l = 0$ доказано.

Пусть теперь $\boxed{l = 1}$, $2 \leqslant j \leqslant m$. Из (26.2), (33.3) следуют равенства

$$\frac{dy_{jj}^{(0)}}{d\tau_j} = \Phi_j(y_{jj}^{(0)}) - \Phi_j(0) = \int\limits_0^1 \frac{d\Phi_j(x_j)}{dx_j}\bigg|_{x_j=\theta y_{jj}^{(0)}} d\theta y_{jj}^{(0)}.$$

Отсюда, из условий 26.2, 26.7 получим оценку $\|dy_{jj}^{(0)}/d\tau_j\| \leqslant C\|y_{jj}^{(0)}(\tau_j)\| \leqslant C\exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\}$.

Продифференцируем уравнения (26.5) по τ_j:

$$\sum_{k=j}^{m} \frac{\partial F_i(x,0,0)}{\partial x_k}\bigg|_{x=\sum\limits_{s=1}^{j-1} y_s^{(0)}(0)+y_j^{(0)}} \frac{dy_{jk}^{(0)}}{d\tau_j} = 0, \quad i = \overline{j+1,m}.$$

Отсюда, из условий 26.2, 26.4, 26.7 следуют оценки: $\|dy_{ji}^{(0)}/d\tau_j\| \leqslant C\|dy_{jj}^{(0)}/d\tau_j\| \leqslant C\exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\}$, $i = \overline{j+1,m}$. Таким образом, получаем неравенство (33.1) при $l = 1$:

$$\left\|\frac{dy_j^{(0)}}{d\tau_j}\right\| \leqslant C_{0j1}\exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\}, \quad \tau_j \geqslant 0.$$

Дальше воспользуемся математической индукцией. Предположим, что для некоторого значения l, $\boxed{1 \leqslant l < n+2}$, при $2 \leqslant j \leqslant m$ неравенства (33.1) выполняются для производных порядка 0, ..., $l-1$. Продифференцируем уравнение (26.2) $(l-1)$ раз по τ_j, уравнения (26.5) l раз по τ_j. Получим линейные алгебраические уравнения для производных l-го порядка

$$\frac{d^l y_{jj}^{(0)}}{d\tau_j^l} = \ldots, \quad \sum_{k=j}^{m} \frac{\partial F_i(x,0,0)}{\partial x_k}\bigg|_{x=\sum\limits_{s=1}^{j-1} y_s^{(0)}(0)+y_j^{(0)}} \frac{d^l y_{jk}^{(0)}}{d\tau_j^l} = \ldots, \quad i = \overline{j+1,m}.$$

Здесь многоточием обозначены линейные комбинации производных $d^k y_{js}^{(0)}/d\tau_j^k$ $(s = \overline{j,m}, \quad k = \overline{1,l-1})$ с ограниченными по норме коэффициентами. Отсюда, из условий 26.2, 26.4, 26.7 следуют оценки

$$\left\|\frac{d^l y_{ji}^{(0)}}{d\tau_j^l}\right\| \leqslant \sum_{k,s} C_{ks}\left\|\frac{d^k y_{js}^{(0)}}{d\tau_j^k}\right\| \leqslant C\exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\}, \quad i = \overline{j,m},$$

$$\left\|\frac{d^l y_j^{(0)}}{d\tau_j^l}\right\| \leqslant C_{0jl}\exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\}, \quad \tau_j \geqslant 0.$$

Таким образом, при сделанном предположении получили, что неравенства (33.1) справедливы для производных порядка l. Так как для производных нулевого и первого порядков неравенства (33.1) доказаны, то по индукции неравенства (33.1) справедливы для всех l, $l = \overline{0, n+2}$. □

§ 34. Функции $y_j^{(k)}$

Лемма 34.1. *При выполнении условий* 26.1–26.7: 1) *функции* $y_j^{(k)}(\tau_j)$ *существуют, единственны и имеют непрерывные производные до* $(n+1-k)$*-го порядка включительно на полуоси* $\tau_j \geqslant 0$, $k = \overline{0, n}$, $j = \overline{2, m}$; 2) *найдутся постоянные* C_{kjl}, $\kappa_{kj} > 0$, *не зависящие от* τ_j *и такие, что*

$$\left\|\frac{d^l y_j^{(k)}(\tau_j)}{d\tau_j^l}\right\| \leqslant C_{kjl}e^{-\kappa_{kj}\tau_j}, \quad \tau_j \geqslant 0, \tag{34.1}$$
$$k = \overline{0, n}, \quad j = \overline{2, m}, \quad l = \overline{0, n+1-k}.$$

При $k = 0$ доказательство дано в § 33. Для $k \geqslant 1$ используется математическая индукция.

Предположение 34.1. *При некотором значении* k, $1 \leqslant k \leqslant n$, *лемма* 34.1 *справедлива для функций* $y_j^{(0)}(\tau_j)$, ..., $y_j^{(k-1)}(\tau_j)$, $j = \overline{2, m}$.

Предположение 34.2. *Для некоторого значения* j, $2 \leqslant j \leqslant m$, *существуют значения* $y_1^{(k)}(0)$, ..., $y_{j-1}^{(k)}(0)$.

Утверждение 34.1. *Если предположение* 34.1 *верно, то при* $i = \overline{1, j-1}$, $j = \overline{2, m}$, $\tau_j \geqslant 0$ *функции* $y_{ji}^{(k)}(\tau_j)$ *существуют, единственны, имеют непрерывные производные до* $(n+2-k)$*-го порядка включительно,*

$$\left\|\frac{d^l y_{ji}^{(k)}(\tau_j)}{d\tau_j^l}\right\| \leqslant Ce^{-\kappa_{kj}\tau_j}, \quad l = \overline{0, n+2-k}.$$

Доказательство. Функции $y_{ji}^{(k)}(\tau_j)$ определяются однозначно по формулам (24.1), (24.3). Запишем (24.3) следующим образом:

$$f_{kji}(\tau_j) = \left[\mu^{K_j-K_i}\int_0^1 \frac{\partial F_i(x, \tau_j\mu^{K_j}, \mu)}{\partial x}\Big|_{x=Y_{kj}} d\theta \sum_{q=0}^{k-1} y_j^{(q)}(\tau_j)\mu^q\right]^{(k)},$$
$$Y_{kj} \equiv \sum_{q=0}^{k-1}\left[\sum_{l=1}^{j-1} y_l^{(q)}(\tau_j\mu^{K_j-K_l}) + \theta y_j^{(q)}(\tau_j)\right]\mu^q. \tag{34.2}$$

Из формул видно, что функция $f_{kji}(\tau_j)$ является линейной комбинацией $y_j^{(q)}(\tau_j)$, $q=\overline{0,k-1}$. Коэффициенты комбинации представляют собой интегралы по θ от суммы произведений констант на функции

$$\frac{\partial^p F_i(x,t,\mu)}{\partial x^{p_1}\partial t^{p_2}\partial\mu^{p_3}}\Big|_{x=\sum\limits_{d=1}^{j-1}y_d^{(0)}(0)+\theta y_j^{(0)}(\tau_j),t=0,\mu=0},\quad y_j^{(p_4)}(\tau_j),\quad \tau_j^r,$$

$p=p_1+p_2+p_3\leqslant k\leqslant n,\quad p_4\leqslant k-1,\quad r\leqslant k-1.$ Среди констант — значения $d^{p_5}y_l^{(q)}(0)/d\tau_l^{p_5}$, $p_5<k-q\leqslant n-q$, $q=\overline{0,k-1}$, $l=\overline{1,j-1}$. Выберем число $\varkappa_{kj}$ из интервала $(0, \min\limits_{0\leqslant q\leqslant k-1}\varkappa_{qj})$. Из (34.2), из условий 26.2, 26.7 следует, что при $\tau_j\geqslant 0$ функция $f_{kji}(\tau_j)$ существует, единственна, имеет непрерывные производные до $(n+2-k)$-го порядка включительно,

$$\|f_{kji}(\tau_j)\|\leqslant\sum_{q,r}C\tau_j^r\|y_j^{(q)}(\tau_j)\|\leqslant\sum_{q,r}C\tau_j^r\exp\{-\varkappa_{qj}\tau_j\}\leqslant Ce^{-\varkappa_{kj}\tau_j}.$$

Отсюда и из (24.1) получаем, что при $\tau_j\geqslant 0$ функции $y_{ji}^{(k)}(\tau_j)$ существуют, единственны, имеют непрерывные производные до $(n+2-k)$-го порядка включительно,

$$\|y_{ji}^{(k)}(\tau_j)\|\leqslant\int\limits_{\tau_j}^{\infty}\|f_{kji}(\sigma)\|d\sigma\leqslant\int\limits_{\tau_j}^{\infty}C\exp\{-\varkappa_{kj}\sigma\}\,d\sigma\leqslant C\exp\{-\varkappa_{kj}\tau_j\}.$$

Оценим производные

$$\frac{d^l y_{ji}^{(k)}}{d\tau_j^l}=\frac{d^{l-1}f_{kji}(\tau_j)}{d\tau_j^{l-1}},\quad l=\overline{1,n+2-k}. \tag{34.3}$$

Из (34.2) следует, что правая часть (34.3) — линейная комбинация производных $d^s y_j^{(q)}(\tau_j)/\,d\tau_j^s$, $q=\overline{0,k-1}$, $s\leqslant l-1\leqslant n+1-k\leqslant n-q$. Коэффициенты комбинации являются интегралами по θ от суммы произведений констант на функции

$$\frac{\partial^p F_i(x,t,\mu)}{\partial x^{p_1}\partial t^{p_2}\partial\mu^{p_3}}\Big|_{x=\sum\limits_{d=1}^{j-1}y_d^{(0)}(0)+\theta y_j^{(0)}(\tau_j),t=0,\mu=0},\quad \frac{d^{p_5}y_j^{(p_4)}(\tau_j)}{d\tau_j^{p_5}},\quad \tau_j^r,\quad \theta,$$

$p=p_1+p_2+p_3\leqslant k+l-1\leqslant n+1,\quad p_4\leqslant k-1,\quad p_5\leqslant l-1\leqslant n-k+1\leqslant n-p_4,\quad r\leqslant k-1.$ Отсюда получаем неравенства

$$\left\|\frac{d^l y_{ji}^{(k)}(\tau_j)}{d\tau_j^l}\right\|\leqslant\sum_{q,r,s}C\tau_j^r\left\|\frac{d^s y_j^{(q)}(\tau_j)}{d\tau_j^s}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{q,r}C\tau_j^r\exp\{-\varkappa_{qj}\tau_j\}\leqslant C\exp\{-\varkappa_{kj}\tau_j\}.$$

□

Утверждение 34.2. *Если предположение 34.1 верно, то функция $y_1^{(k)}(\tau_1)$ существует, единственна и имеет непрерывные производные до порядка $(n+2-k)$ включительно на множестве $D_t \ni \tau_1$.*

Доказательство. Функция $y_{11}^{(k)}(\tau_1)$ является решением линейной задачи (24.10), которая имеет вид

$$\frac{dy_{11}^{(k)}}{d\tau_1} = \widetilde{A}_1(\tau_1)y_{11}^{(k)} + f_{k11}(\tau_1), \quad y_{11}^{(k)}(0) = \left[x_1^\circ(\mu)\right]^{(k)} - \sum_{j=2}^{m} y_{j1}^{(k)}(0),$$

$$\widetilde{A}_1(\tau_1) = \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial(x_2\ldots x_m)}H_1\frac{\partial(F_2\ldots F_m)}{\partial x_1}\right](0,\tau_1,0),$$

$$f_{k11}(\tau_1) = \left[\frac{\partial F_1}{\partial(x_2\ldots x_m)}H_1\right](0,\tau_1,0)\cdot\begin{pmatrix} f_{k12}\\ \vdots \\ f_{k1m}\end{pmatrix}(\tau_1) + \qquad (34.4)$$

$$+\left[F_1\left(\sum_{q=0}^{k-1} y_1^{(q)}(\tau_1)\mu^q, \tau_1, \mu\right)\right]^{(k)},$$

$$f_{k1i}(\tau_1) = \left[\sum_{q=0}^{k-1}\frac{dy_{1i}^{(q)}(\tau_1)}{d\tau_1}\mu^{K_i+q} - F_i\left(\sum_{q=0}^{k-1} y_1^{(q)}(\tau_1)\mu^q, \tau_1, \mu\right)\right]^{(k)},$$

$$i = \overline{2,m}.$$

Значения $y_{j1}^{(k)}(0)$, $j=\overline{2,m}$, существуют по утверждению 34.1. Правая часть дифференциального уравнения (34.4) имеет непрерывные производные до $(n+2-k)$-го порядка включительно на множестве $D_t \ni \tau_1$. Поэтому при $\tau_1 \in D_t$ функция $y_{11}^{(k)}(\tau_1)$ существует, единственна и имеет непрерывные производные до порядка $(n+3-k)$ включительно.

Из уравнений (24.7) следует, что при $\tau_1 \in D_t$ функции $y_{1i}^{(k)}(\tau_1)$, $i=\overline{2,m}$, существуют, единственны и имеют вид

$$\begin{pmatrix} y_{12}^{(k)}\\ \vdots \\ y_{1m}^{(k)}\end{pmatrix} = H_1(0,\tau_1,0)\cdot\left[-\frac{\partial(F_2\ldots F_m)}{\partial x_1}(0,\tau_1,0)\cdot y_{11}^{(k)}(\tau_1) + \begin{pmatrix} f_{k12}\\ \vdots \\ f_{k1m}\end{pmatrix}(\tau_1)\right]. \quad (34.5)$$

Отсюда следует, что при $\tau_1 \in D_t$ функция $y_1^{(k)}(\tau_1) = \left(y_{11}^{(k)}(\tau_1), \ldots, y_{1m}^{(k)}(\tau_1)\right)$ существует, единственна, имеет непрерывные производные до $(n+2-k)$-го порядка включительно. □

Утверждение 34.3. *Если предположения* 34.1, 34.2 *верны и* $m \geqslant 3$, $2 \leqslant j < m$, *то* $y_{ji}^{(k)}$, $i = \overline{j+1, m}$, *существуют и единственны как функции от* $y_{jj}^{(k)}$, τ_j,

$$y_{ji}^{(k)} = \widetilde{\varphi}_{kji}\left(y_{jj}^{(k)}, \tau_j\right) \equiv b_{ji}(\tau_j) y_{jj}^{(k)} + c_{kji}(\tau_j), \quad \tau_j \geqslant 0; \tag{34.6}$$

c_{kji} *имеют непрерывные производные до* $(n+1-k)$*-го порядка включительно,*

$$\left\| \frac{d^l c_{kji}(\tau_j)}{d\tau_j^l} \right\| \leqslant C \exp\{-\kappa_{kj}\tau_j\}, \quad l = \overline{0, n+1-k}, \quad \tau_j \geqslant 0. \tag{34.7}$$

Доказательство. Существование, единственность функций $\widetilde{\varphi}_{kji}\left(y_{jj}^{(k)}, \tau_j\right)$ и их явный вид (34.6) следует из формул (24.7) и утверждения 34.1. При этом

$$\begin{pmatrix} b_{j\,j+1} \\ \vdots \\ b_{jm} \end{pmatrix}(\tau_j) \equiv -\left[H_j \frac{\partial(F_{j+1}\ldots F_m)}{\partial x_j} \right](Y_j(\tau_j),0,0),$$

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} c_{kj\,j+1} \\ \vdots \\ c_{kjm} \end{pmatrix}(\tau_j) \equiv -\left[H_j \frac{\partial(F_{j+1}\ldots F_m)}{\partial(x_1\ldots x_{j-1})} \right]\left(Y_j(\tau_j),0,0\right) \cdot \begin{pmatrix} y_{j1}^{(k)} \\ \vdots \\ y_{j\,j-1}^{(k)} \end{pmatrix}(\tau_j) + \\ + H_j\left(Y_j(\tau_j),0,0\right) \cdot \begin{pmatrix} f_{kj\,j+1} \\ \vdots \\ f_{kjm} \end{pmatrix}(\tau_j),\end{gathered} \tag{34.8}$$

$$Y_j(\tau_j) \equiv \sum_{l=1}^{j-1} y_l^{(0)}(0) + y_j^{(0)}(\tau_j).$$

Функции $f_{kj\,j+1}, \ldots, f_{kjm}$ задаются формулами (24.6), которые запишем следующим образом:

$$\begin{gathered} f_{kji}(\tau_j) = -\sum_{p=j}^{m} \int_0^1 \frac{\partial^2 F_i(x,0,0)}{\partial x \partial x_p}\Big|_{x=Y_{j\theta}} d\theta \cdot y_{jp}^{(0)}(\tau_j) \sum_{d=1}^{j-1} y_d^{(k)}(0) + \\ + \left[\sum_{q=0}^{k-1} \frac{dy_{ji}^{(q)}(\tau_j)}{d\tau_j} \mu^{K_i - K_j + q} \right]^{(k)} - \\ - \left[\int_0^1 \frac{\partial F_i}{\partial x}\left(x, \tau_j \mu^{K_j}, \mu\right)\Big|_{x=Y_{kj}} d\theta \sum_{q=0}^{k-1} y_j^{(q)}(\tau_j)\mu^q \right]^{(k)}, \end{gathered} \tag{34.9}$$

$$Y_{j\theta} \equiv \sum_{l=1}^{j-1} y_l^{(0)}(0) + \theta y_j^{(0)}(\tau_j),$$

$$Y_{kj} \equiv \sum_{q=0}^{k-1} \left[\sum_{d=1}^{j-1} y_d^{(q)}(\tau_j \mu^{K_j - K_d}) + \theta y_j^{(q)}(\tau_j) \right] \mu^q,$$

$$i = \overline{j+1, m}.$$

Значения $y_d^{(k)}(0)$, $d = \overline{1, j-1}$, существуют по предположению 34.2. Из гладкости функций $F_i(x, 0, 0)$, $y_j^{(q)}(\tau_j)$, $q = \overline{0, k-1}$, следует, что f_{kji} имеют непрерывные производные до $(n+1-k)$-го порядка включительно при $\tau_j \geqslant 0$. f_{kji} — линейная функция от $y_j^{(q)}$, $q = \overline{0, k-1}$, и их производных. Продифференцируем (34.9) l раз. Оценим производные, используя предположение 34.1. Получим

$$\left\| \frac{d^l f_{kji}(\tau_j)}{d\tau_j^l} \right\| \leqslant C \exp\{-\kappa_{kj}\tau_j\}, \quad l = \overline{0, n+1-k}, \quad i = \overline{j+1, m}. \tag{34.10}$$

Отсюда, из (34.8), из утверждения 34.1 и из условий 26.2, 26.4, 26.7 следует, что функции $c_{kji}(\tau_j)$ в (34.6) имеют непрерывные производные до $(n + 1 - k)$-го порядка включительно и удовлетворяют неравенствам (34.7). □

Утверждение 34.4. *При* $0 \leqslant \sigma_j \leqslant \tau_j$ *матрица Коши* $\widetilde{U}_j(\tau_j, \sigma_j)$ *уравнения* (24.11) *существует, единственна и удовлетворяет неравенству*

$$\|\widetilde{U}_j(\tau_j, \sigma_j)\| \leqslant C \exp\big\{ -\kappa_{0j}(\tau_j - \sigma_j)\big\}, \quad 2 \leqslant j \leqslant m. \tag{34.11}$$

Доказательство. Существование и единственность матрицы $\widetilde{U}_j(\tau_j, \sigma_j)$ при $0 \leqslant \sigma_j \leqslant \tau_j$ следует из гладкости правой части уравнения (24.11) на полуоси $\tau_j \geqslant 0$. Из (24.10), (26.8) следует равенство

$$\widetilde{A}_j(\tau_j) = A_j \left(\sum_{d=1}^{j-1} y_d^{(0)}(0) + y_j^{(0)}(\tau_j), 0, 0 \right).$$

Запишем уравнения для $\widetilde{U}_j(\tau_j, \sigma_j)$ в следующем виде:

$$\frac{\partial \widetilde{U}_j}{\partial \tau_j} = A_{j*}\widetilde{U}_j + [\widetilde{A}_j(\tau_j) - A_{j*}]\widetilde{U}_j, \quad \widetilde{U}_j(\sigma_j, \sigma_j) = E_j.$$

Здесь A_{j*} — постоянная матрица (26.8). Написанные уравнения эквивалентны интегральному уравнению

$$\widetilde{U}_j(\tau_j, \sigma_j) = \exp\big\{A_{j*}(\tau_j - \sigma_j)\big\} + \int_{\sigma_j}^{\tau_j} \exp\big\{A_{j*}(\tau_j - s)\big\} \times$$

$$\times [\widetilde{A}_j(s) - A_{j*}] \cdot \widetilde{U}_j(s, \sigma_j)\, ds. \tag{34.12}$$

Оценим разность

$$\widetilde{A}_j(\tau_j)-A_{j*}=\int\limits_0^1 \frac{\partial A_j(x,0,0)}{\partial x}\Big|_{x=Y_{j\theta}}\,d\theta y_j^{(0)}(\tau_j),\quad Y_{j\theta}\equiv\sum_{d=1}^{j-1}y_d^{(0)}(0)+\theta y_j^{(0)}(\tau_j).$$

Отсюда, из условий 26.2, 26.4, 26.7 и неравенства (33.1) получим

$$\|\widetilde{A}_j(\tau_j)-A_{j*}\|\leqslant C\|y_j^{(0)}(\tau_j)\|\leqslant C\exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\},\quad \tau_j\geqslant 0. \tag{34.13}$$

Так как κ_{0j} принадлежит интервалу $(0,-\max\limits_s\lambda_{js})$, где λ_{js} — собственные числа матрицы A_{j*} (смотрите п. 33.2), то из (34.12), (34.13) следуют неравенства

$$\|\exp\{A_{j*}\tau_j\}\|\leqslant C\exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\},\quad \tau_j\geqslant 0;$$

$$\|\widetilde{U}_j(\tau_j,\sigma_j)\|\leqslant C\exp\big\{-\kappa_{0j}(\tau_j-\sigma_j)\big\}+\int\limits_{\sigma_j}^{\tau_j}C\exp\big\{-\kappa_{0j}\tau_j\big\}\|\widetilde{U}_j(s,\sigma_j)\|\,ds.$$

Для функции $\omega(\tau_j)\equiv\|\widetilde{U}_j(\tau_j,\sigma_j)\|\cdot\exp\{\kappa_{0j}\tau_j\}$ это неравенство имеет вид

$$\omega(\tau_j)\leqslant C\exp\{\kappa_{0j}\sigma_j\}+\int\limits_{\sigma_j}^{\tau_j}C\exp\{-\kappa_{0j}s\}\omega(s)\,ds.$$

По лемме Гронуолла—Беллмана 13.1 отсюда следует, что

$$\omega(\tau_j)\leqslant C\exp\left\{\kappa_{0j}\sigma_j+\int\limits_{\sigma_j}^{\tau_j}C\exp\{-\kappa_{0j}s\}\,ds\right\}=C\exp\Big\{\kappa_{0j}\sigma_j+$$
$$+C\Big[\exp\{-\kappa_{0j}\sigma_j\}-\exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\}\Big]\Big\}\leqslant C\exp\{\kappa_{0j}\sigma_j\},\quad \tau_j\geqslant\sigma_j.$$

Для матрицы Коши получаем оценку

$$\|\widetilde{U}_j(\tau_j,\sigma_j)\|=\omega(\tau_j)\cdot\exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\}\leqslant C\exp\big\{-\kappa_{0j}(\tau_j-\sigma_j)\big\}.$$ □

Утверждение 34.5. *Если предположения* 34.1, 34.2 *верны, то при* $\tau_j\geqslant 0$ *функции* $y_{jj}^{(k)}(\tau_j)$ *существуют, единственны и имеют непрерывные производные до* $(n+2-k)$*-го порядка включительно,*

$$\left\|\frac{d^l y_{jj}^{(k)}(\tau_j)}{d\tau_j^l}\right\|\leqslant C\exp\{-\kappa_{kj}\tau_j\},\quad l=\overline{0,n+2-k},\quad \tau_j\geqslant 0. \tag{34.14}$$

Доказательство. Функция $y_{jj}^{(k)}(\tau_j)$ является решением линейной задачи Коши (24.10). Поэтому при $\tau_j \geqslant 0$ она существует, единственна, имеет непрерывные производные до $(n+2-k)$-го порядка включительно и описывается формулой (24.12). Чтобы получить оценки (34.14), запишем формулы (24.10) для $f_{kjj}(\tau_j)$ следующим образом:

$$f_{kjj}(\tau_j) = A_j\big(Y_j(\tau_j), 0, 0\big) \cdot \begin{pmatrix} y_{j1}^{(k)} \\ \vdots \\ y_{j\,j-1}^{(k)} \end{pmatrix} (\tau_j) +$$

$$+ \left[\frac{\partial F_j}{\partial(x_{j+1} \ldots x_m)} H_j\right] \big(Y_j(\tau_j), 0, 0\big) \cdot \begin{pmatrix} f_{kj\,j+1} \\ \vdots \\ f_{kjm} \end{pmatrix} (\tau_j)_{\langle j<m\rangle} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{m} \int_0^1 \frac{\partial^2 F_j}{\partial x \partial x_p}(Y_{j\theta}, 0, 0)\, d\theta \cdot y_{jp}^{(0)}(\tau_j) \sum_{l=1}^{j-1} y_l^{(k)}(0) +$$

$$+ \left[\int_0^1 \frac{\partial F_j\big(x, \tau_j \mu^{K_j}, \mu\big)}{\partial x}\bigg|_{x=Y_{kj}} d\theta \sum_{q=0}^{k-1} y_j^{(q)}(\tau_j)\mu^q\right]^{(k)},$$

$$A_j = \left[\frac{\partial F_j}{\partial(x_1 \ldots x_{j-1})} - \frac{\partial F_j}{\partial(x_{j+1} \ldots x_m)} H_j \frac{\partial(F_{j+1} \ldots F_m)}{\partial(x_1 \ldots x_{j-1})}{}_{\langle j<m\rangle}\right],$$

$$Y_j(\tau_j) = \sum_{d=1}^{j-1} y_d^{(0)}(0) + y_j^{(0)}(\tau_j), \quad Y_{j\theta} = \sum_{d=1}^{j-1} y_d^{(0)}(0) + \theta y_j^{(0)}(\tau_j),$$

$$Y_{kj} \equiv \sum_{q=0}^{k-1} \left[\sum_{d=1}^{j-1} y_d^{(q)}\big(\tau_j \mu^{K_j - K_d}\big) + \theta y_j^{(q)}(\tau_j)\right] \mu^q.$$

Из формул видно, что $f_{kjj}(\tau_j)$ — линейная комбинация функций $y_{ji}^{(k)}(\tau_j)$ $\left(i = \overline{1, j-1}\right)$, $y_j^{(q)}(\tau_j)$ $\left(q = \overline{0, k-1}\right)$, $f_{kji\langle j<m\rangle}$ $\left(i = \overline{j+1, m}\right)$. Продифференцируем $f_{kjj}(\tau_j)$ l раз. Из предположения 34.1, утверждения 34.1 и из (34.10) получим неравенства

$$\left\| \frac{d^l f_{kjj}(\tau_j)}{d\tau_j^l} \right\| \leqslant C \exp\{-\varkappa_{kj}\tau_j\}, \quad l = \overline{0, n+1-k}, \quad \tau_j \geqslant 0. \qquad (34.15)$$

Отсюда и из (24.12), (34.11) следует:

$$\|y_{jj}^{(k)}(\tau_j)\| \leqslant \|\widetilde{U}_j(\tau_j, 0)\| \cdot \left\| \left[x_j^\circ(\mu)\right]^{(k)} - \sum_{d=\overline{1,m}\ d\neq j} y_{dj}^{(k)}(0) \right\| +$$

$$+\int\limits_0^{\tau_j} \|\widetilde{U}_j(\tau_j,\sigma_j)\|\cdot\|f_{kjj}(\sigma_j)\|\,d\sigma_j \leqslant$$

$$\leqslant C\exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\}+\int\limits_0^{\tau_j} C\exp\{-\kappa_{0j}\tau_j+\kappa_{0j}\sigma_j-\kappa_{kj}\sigma_j\}\,d\sigma_j=$$

$$=C\exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\}+C\big[\exp\{-\kappa_{kj}\tau_j\}-\exp\{-\kappa_{0j}\tau_j\}\big]\leqslant$$
$$\leqslant C\exp\{-\kappa_{kj}\tau_j\},\quad \tau_j\geqslant 0. \tag{34.16}$$

Получили неравенство (34.14) при $\boxed{l=0}$.

Предположим, что для некоторого значения l, $\boxed{1\leqslant l\leqslant n+2-k}$, неравенства (34.14) справедливы для производных порядка $0,\ldots,l-1$. Продифференцируем уравнение (24.10) $(l-1)$ раз:

$$\frac{d^l y_{jj}^{(k)}(\tau_j)}{d\tau_j^l}=\frac{d^{l-1}}{d\tau_j^{l-1}}\big[\widetilde{A}_j(\tau_j)y_{jj}^{(k)}(\tau_j)\big]+\frac{d^{l-1}f_{kjj}(\tau_j)}{d\tau_j^{l-1}}.$$

Отсюда и из (34.15) следует, что неравенство (34.14) выполняется и для производной l-го порядка. Так как для производной нулевого порядка (34.14) доказано, то по индукции (34.14) справедливо для всех l, $l=\overline{0,n+2-k}$. □

Утверждение 34.6. *Если предположения* 34.1, 34.2 *верны и* $m\geqslant 3$, $j<m$, *то при* $\tau_j\geqslant 0$ *функции* $y_{ji}^{(k)}(\tau_j)$, $i=\overline{j+1,m}$, *существуют, единственны и имеют непрерывные производные до* $(n+1-k)$*-го порядка включительно,*

$$\left\|\frac{d^l y_{ji}^{(k)}(\tau_j)}{d\tau_j^l}\right\|\leqslant C\exp\{-\kappa_{kj}\tau_j\},\quad l=\overline{0,n+1-k}.$$

Доказательство. Утверждение 34.6 следует из утверждений 34.3, 34.5, из формулы (34.8) для $b_{ji}(\tau_j)$ и из условий 26.2, 26.4, 26.7. □

Окончание доказательства леммы 34.1. Из утверждений 34.1, 34.5, 34.6 следует: если предположения 34.1, 34.2 верны, то лемма 34.1 справедлива для $y_j^{(k)}(\tau_j)$. Поэтому значение $y_j^{(k)}(0)$ существует. Так как существование $y_1^{(k)}(0)$ следует из утверждения 34.2, то по индукции значения $y_j^{(k)}(0)$ существуют для всех j, $j=\overline{1,m}$.

Получили: если предположение 34.1 верно, то лемма 34.1 справедлива для функций $y_j^{(k)}(\tau_j)$, $j=\overline{2,m}$. Так как для функций $y_j^{(0)}(\tau_j)$, $j=\overline{2,m}$, утверждения леммы 34.1 следуют из леммы 33.1, то по индукции лемма 34.1 справедлива для всех $k=\overline{0,n}$.

§ 35. Функции $y_1^{(k)}$

Лемма 35.1. *При выполнении условий теорем* 28.1–28.4: 1) *функции* $y_1^{(k)}(t)$, $k=\overline{1,n}$, $n\geqslant 1$, *существуют, единственны и имеют непрерывные производные до порядка* $(n+2-k)$ *включительно на множестве* $D_t\ni t$; 2) *найдутся такие постоянные* C_{k1l}, C_{k1l}°, *не зависящие от* t *и такие, что при* $t\in D_t$, $k=\overline{1,n}$, $l=\overline{0,n+2-k}$ *выполняются неравенства*

$$
\begin{array}{lll}
\text{I,II.} & \left\|\dfrac{d^l y_1^{(k)}(t)}{dt^l}\right\|\leqslant C_{k1l} & \text{(для теорем 28.1, 28.2)},\\
\text{III.} & \left\|\dfrac{d^l y_1^{(k)}(t)}{dt^l}\right\|\leqslant C_{k1l}^\circ t^{(\varkappa_1+1)(2k-1)}+C_{k1l} & \text{(для теоремы 28.3)},\\
\text{IV.} & \left\|\dfrac{d^l y_1^{(k)}(t)}{dt^l}\right\|\leqslant C_{k1l}\exp\{k\varkappa_1 t\} & \text{(для теоремы 28.4)}.
\end{array}
\tag{35.1}
$$

Предположение 35.1. *Если* $n\geqslant 2$, *то для некоторого целого* k, $2\leqslant k\leqslant n$, *неравенства* (35.1) *выполняются для функций* $y_1^{(1)}(t)$, ..., $y_1^{(k-1)}(t)$ *и их производных.*

Доказательство леммы 35.1. Существование, единственность и гладкость функций доказаны в § 34 (утверждение 34.2). Перейдем к их оценке.

Функция $y_{11}^{(k)}(t)$ задается формулой (24.12), которую запишем в виде

$$
y_{11}^{(k)}(t)=U_1(t,0)\cdot\left\{\left[x_1^\circ(\mu)\right]^{(k)}-\sum_{j=2}^{m}y_{j1}^{(k)}(0)\right\}+\int\limits_0^t U_1(t,s)\cdot f_{k11}(s)\,ds. \tag{35.2}
$$

Здесь $U_1(t,s)$ — матрица Коши уравнения

$$
\frac{dr_1}{dt}=\widetilde{A}_1(t)r_1, \tag{35.3}
$$

f_{k11}, $\widetilde{A}_1$ определяются равенствами (34.4), $U_1(t,s)=\widetilde{U}_1(t,s)$. Рассмотрим функции

$$
Q_{ki}(t)\equiv\left[F_i\left(\sum_{q=0}^{k-1}y_1^{(q)}(t)\mu^q,t,\mu\right)\right]^{(k)},\quad i=\overline{1,m}.
$$

При $\boxed{k=1}$ по условию 26.2 имеем

$$
Q_{1i}(t)=\left.\frac{\partial F_i(x,t,\mu)}{\partial\mu}\right|_{x=0,\mu=0},\quad \|Q_{1i}(t)\|\leqslant C,\quad t\in D_t,\quad i=\overline{1,m}. \tag{35.4}
$$

При $\boxed{2 \leqslant k \leqslant n}$ Q_{ki} представляет собой сумму произведений констант на функции

$$\left.\frac{\partial^p F_i(x,t,\mu)}{\partial x^{p_1}\partial\mu^{p_2}}\right|_{x=0,\mu=0}, \quad \prod_{q=1}^{k-1}\prod_{j=1}^{N}[y_{1j}^{(q)}(t)]^{s_{qj}},$$
$$p = p_1 + p_2 \leqslant k, \quad s_{qj} \geqslant 0, \quad \sum_{q=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{N} q s_{qj} \leqslant k. \tag{35.5}$$

Отсюда, используя условие 26.2 и предположение 35.1, получим следующие оценки на множестве $D_t \ni t$:

$$\|Q_{ki}(t)\| \leqslant \sum_s C \prod_{q=1}^{k-1}\prod_{j=1}^{N} |y_{1j}^{(q)}(t)|^{s_{qj}}. \tag{35.6}$$

$$\text{I, II.} \qquad \|Q_{ki}(t)\| \leqslant C. \tag{35.7}$$

$$\text{III.} \qquad \|Q_{ki}(t)\| \leqslant \sum_s C \prod_{q=1}^{k-1}\prod_{j=1}^{N} \left[Ct^{(\kappa_1+1)(2q-1)} + C\right]^{s_{qj}} \leqslant \sum_s \Pi_s,$$

$$\Pi_s \equiv Ct^{(\kappa_1+1)S_1} + C, S_1 \equiv \sum_{q=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{N} s_{qj}(2q-1).$$

Если $S_2 \equiv \sum\limits_{q=1}^{k-1}\sum\limits_{j=1}^{N} s_{qj} = 0$, то все $s_{qj} = 0$, $\quad S_1 = 0$, $\Pi_s = \text{const}$. Если $S_2 = 1$, то лишь для одной пары (q_*, j_*) $\quad s_{q_*j_*} \neq 0$, $\quad s_{q_*j_*} = 1$. Остальные $s_{qj} = 0$. Поэтому

$$S_1 = s_{q_*j_*}(2q_* - 1) = 2q_* - 1 \leqslant 2k - 3, \quad \Pi_s \leqslant Ct^{(\kappa_1+1)(2k-3)} + C.$$

При $S_2 \geqslant 2$ из (35.5), (35.7) следует, что

$$S_1 = 2\sum_{q=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{N} q s_{qj} - S_2 \leqslant 2k - 2, \quad \Pi_s \leqslant Ct^{(\kappa_1+1)(2k-2)} + C.$$

Из оценок Π_s получаем

$$\text{III.} \quad \|Q_{ki}(t)\| \leqslant \sum_s \left[Ct^{(\kappa_1+1)(2k-2)} + C\right] = Ct^{(\kappa_1+1)(2k-2)} + C. \tag{35.8}$$

Для теоремы 28.4 из предположения 35.1 и неравенств (35.5), (35.6) следуют оценки

$$\text{IV.} \quad \|Q_{ki}(t)\| \leqslant \sum_s C \prod_{q=1}^{k-1}\prod_{j=1}^{N} \left[C\exp\{q\kappa_1 t\}\right]^{s_{qj}} =$$

$$= \sum_s C \exp\left\{ \sum_{q=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{N} q s_{qj} \kappa_1 t \right\} \leqslant C \exp\{k\kappa_1 t\}. \qquad (35.9)$$

Из (34.4), (35.4), (35.7)–(35.9) и предположения 35.1 получим, что при $t \in D_t$, $i = \overline{1, m}$

$$\|f_{k1i}(t)\| \leqslant \begin{cases} C, & & \text{I, II}, \\ Ct^{(\kappa_1+1)(2k-2)} + C, & & \text{III}, \\ C, & k = 1, & \text{IV}, \\ C\exp\{k\kappa_1 t\}, & k = \overline{2, n},\ n \geqslant 2, & \text{IV}. \end{cases} \qquad (35.10)$$

Матрица Коши $U_1(t, s)$ уравнения (35.3) существует, единственна и непрерывна при $s \in D_t$, $t \in D_t$, $0 \leqslant s \leqslant t$. Это следует из гладкости правой части уравнения (35.3). Из непрерывности матрицы следует ограниченность $\|U_1(t, s)\| \leqslant C$ при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. Для теорем 28.2–28.4 справедливы неравенства (28.3)–(28.5) по условию. Отсюда и из (35.2), (35.10) получим оценки функции $y_{11}^{(k)}(t)$ при $t \in D_t$:

$$\|y_{11}^{(k)}(t)\| \leqslant \|U_1(t, 0)\| \cdot \left\| \left[\overset{\circ}{x}_1(\mu)\right]^{(k)} - \sum_{j=2}^{m} y_{j1}^{(k)}(0) \right\| + \\ + \int_0^t \|U_1(t, s)\| \cdot \|f_{k11}(s)\|\, ds, \qquad (35.11)$$

I. $$\|y_{11}^{(k)}(t)\| \leqslant C + \int_0^t C\, ds \leqslant C + CT = C,$$

II. $$\|y_{11}^{(k)}(t)\| \leqslant C\exp\{-\kappa_1 t\} + \int_0^t C\exp\{-\kappa_1(t-s)\}\, ds \leqslant \\ \leqslant C + C\left[1 - \exp\{-\kappa_1 t\}\right] \leqslant C,$$

III. $$\|y_{11}^{(k)}(t)\| \leqslant Ct^{\kappa_1} + C + \int_0^t \left[C(t-s)^{\kappa_1} + C\right] \cdot \left[Cs^{(\kappa_1+1)(2k-2)} + C\right] ds \leqslant \\ \leqslant Ct^{(\kappa_1+1)(2k-1)} + C,$$

IV. $$\|y_{11}^{(1)}(t)\| \leqslant C\exp\{\kappa_1 t\} + \int_0^t C\exp\{\kappa_1(t-s)\}\, ds \leqslant C\exp\{\kappa_1 t\},$$

$$\|y_{11}^{(k)}(t)\| \leqslant C\exp\{\kappa_1 t\} + \int\limits_0^t C\exp\{\kappa_1 t - \kappa_1 s + k\kappa_1 s\}\,ds \leqslant C\exp\{k\kappa_1 t\},$$

$$k = \overline{2, n}, \quad n \geqslant 2.$$

Продифференцируем функции $f_{k1i}(t)$ в (34.4) l раз и оценим производные так же, как оценили функции в (35.10). Получим, что при $l = \overline{1, n+2-k}$, $\quad t \in D_t$, $\quad i = \overline{1, m}$

$$\left\|\frac{d^l f_{k1i}(t)}{dt^l}\right\| \leqslant \begin{cases} C, & \text{I, II}, \\ Ct^{(\kappa_1+1)(2k-2)} + C, & \text{III}, \\ C\exp\{k\kappa_1 t\}, & \text{IV}. \end{cases} \tag{35.12}$$

Продифференцируем уравнение (34.4) $(l-1)$ раз, $l \geqslant 1$:

$$\frac{d^l y_{11}^{(k)}(t)}{dt^l} = \frac{d^{l-1}}{dt^{l-1}}\left[\widetilde{A}_1(t)\cdot y_{11}^{(k)}(t)\right] + \frac{d^{l-1} f_{k11}(t)}{dt^{l-1}}.$$

Отсюда, используя индукцию по l и неравенства (35.11), (35.12), получим оценки при $t \in D_t$, $\quad l = \overline{0, n+3-k}$:

$$\left\|\frac{d^l y_{11}^{(k)}(t)}{dt^l}\right\| \leqslant \begin{cases} C, & \text{I, II}, \\ Ct^{(\kappa_1+1)(2k-1)} + C, & \text{III}, \\ C\exp\{k\kappa_1 t\}, & \text{IV}. \end{cases} \tag{35.13}$$

Из формул (34.5) следуют неравенства для $i = \overline{2, m}$, $l = \overline{0, n+2-k}$:

$$\left\|\frac{d^l y_{1i}^{(k)}(t)}{dt^l}\right\| \leqslant \left\|\frac{d^l}{dt^l}\left[\left(H_1\frac{\partial(F_2\ldots F_m)}{\partial x_1}\right)(0,t,0)\cdot y_{11}^{(k)}(t)\right]\right\| +$$

$$+\left\|\frac{d^l}{dt^l}\left[H_1(0,t,0)\cdot\begin{pmatrix} f_{k12} \\ \vdots \\ f_{k1m}\end{pmatrix}(t)\right]\right\|.$$

Отсюда и из (35.12), (35.13) получим оценки при $t \in D_t$, $\quad l = \overline{0, n+2-k}$, $i = \overline{2, m}$:

$$\left\|\frac{d^l y_{1i}^{(k)}(t)}{dt^l}\right\| \leqslant \begin{cases} C, & \text{I, II}, \\ Ct^{(\kappa_1+1)(2k-1)} + C, & \text{III}, \\ C\exp\{k\kappa_1 t\}, & \text{IV}. \end{cases} \tag{35.14}$$

Из (35.13), (35.14) следует, что неравенства (35.1) справедливы: 1) при $k = 1$, $\quad$ 2) если выполняется предположение 35.1, то при k из множества $2 \leqslant k \leqslant n$. По индукции отсюда получаем, что неравенства (35.1) выполняются для всех $k = \overline{1, n}$. □

§ 36. Введение вспомогательной переменной

Для доказательства теорем 28.1–28.4 введем вспомогательную переменную $u = u(t, \mu)$,

$$u \equiv x - X_n(t, \mu) - x^\circ(\mu) + X_n(0, \mu), \tag{36.1}$$

где $X_n(t, \mu)$ задается формулой (28.1). Из (22.1), (36.1) следует, что u — решение следующей задачи:

$$\begin{gathered}
\mu^{K_i}\frac{du_i}{dt} = B_i(t,\mu)u + G_i(u,t,\mu), \quad u|_{t=0} = 0,\\
B_i(t,\mu) \equiv F_{ix}\big(X_0(t,\mu),t,0\big),\\
G_i(u,t,\mu) \equiv F_i\big(u + X_n(t,\mu) + x^\circ(\mu) - X_n(0,\mu),t,\mu\big) -\\
- \mu^{K_i}\frac{\partial X_{ni}(t,\mu)}{\partial t} - F_{ix}\Big(X_0(t,\mu),t,0\Big)u, \quad i = \overline{1,m},\\
X_n(t,\mu) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j^{(k)}(t\mu^{-K_j})\mu^k,\\
u = (u_1,\ldots,u_m), \quad X_n = (X_{n1},\ldots,X_{nm}).
\end{gathered} \tag{36.2}$$

Из алгоритма построения асимптотики (смотрите § 23) следует, что

$$X_n(0, \mu) = \big[x^\circ(\mu)\big]^{(\leqslant n)},$$

где $[\ \ ]^{(\leqslant n)}$ означает частичную сумму n-го порядка ряда Маклорена функции, стоящей в квадратных скобках. Отсюда и из условия 26.3 получим неравенство

$$\big\|x^\circ(\mu) - X_n(0, \mu)\big\| \leqslant C\mu^{n+1}, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \bar{\mu}. \tag{36.3}$$

Обозначим $\widetilde{u}$ остаточный член ряда (23.2) n-го порядка.

$$\begin{gathered}
\widetilde{u}(t, \mu) \equiv x(t, \mu) - X_n(t, \mu) = u(t, \mu) + x^\circ(\mu) - X_n(0, \mu),\\
\|\widetilde{u}(t, \mu)\| \leqslant \|u(t, \mu)\| + \|x^\circ(\mu) - X_n(0, \mu)\| \leqslant \|u(t, \mu)\| + C\mu^{n+1}.
\end{gathered} \tag{36.4}$$

Неравенство имеет место на области определения функции $u(t, \mu)$ при $0 \leqslant \mu \leqslant \bar{\mu}$. Отсюда и из (36.1) следует: для доказательства теорем 28.1–28.4 достаточно доказать существование и единственность решения задачи (36.2) и получить его оценку.

Задача (36.2) совпадает с задачей (28.6). Чтобы воспользоваться теоремой 28.5, нужно предварительно рассмотреть матрицы Коши $V_i(t, s, \mu)$ уравнений (28.8) и векторы $G_i(u, t, \mu)$.

§ 37. Матрицы V_i

Лемма 37.1. *При выполнении условий теорем* 28.1–28.4 *найдутся такие значения* μ_1, C_{11}, ..., C_{1m}, C_{11}°, *что* $0 < \mu_1 \leqslant \bar{\mu}$, $C_{1i} \geqslant 1$, $i = \overline{1, m}$, $C_{11}^{\circ} \geqslant 0$ *и при* $t \in D_t$, $s \in D_t$, $0 \leqslant s \leqslant t$, $0 < \mu \leqslant \mu_1$ *матрицы* $V_i(t, s, \mu)$, $i = \overline{1, m}$, *существуют, единственны, непрерывно дифференцируемы по* t, s *и удовлетворяют неравенствам*

$$\|V_1(t, s, \mu)\| \leqslant g_1(t - s),$$
$$\|V_i(t, s, \mu)\| \leqslant C_{1i} \exp\left\{ - \kappa_i(t - s)\mu^{-K_i}\right\}, \quad i = \overline{2, m},$$
$$g_1(t) \equiv \begin{cases} C_{11}, & \text{I}, \\ C_{11} \exp\{-\kappa_1 t\}, & \text{II}, \\ C_{11}^{\circ} t^{\kappa_1} + C_{11}, & \text{III}, \\ C_{11} \exp\{\kappa_1 t\}, & \text{IV}. \end{cases} \tag{37.1}$$

Доказательство. Из (28.7), (28.8), (36.2) следует, что $V_i(t, s, \mu)$ — матрица Коши системы

$$\mu^{K_i}\frac{dr_i}{dt} = A_i(X_0(t, \mu), t, 0)r_i, \quad X_0(t, \mu) = \sum_{j=1}^{m} y_j^{(0)}(t\mu^{-K_j}), \quad i = \overline{1, m}, \tag{37.2}$$

где A_i — матрица (26.8). Из леммы 33.1, равенства $y_1^{(0)}(t) = 0$ и условий 26.2, 26.4, 26.7 следует, что правая часть дифференциального уравнения (37.2) непрерывна по t на множестве $t \in D_t$, $\mu > 0$. Поэтому на этом множестве матрица $V_i(t, s, \mu)$ существует, единственна и непрерывно дифференцируема по t, s [4]. Чтобы оценить норму, запишем дифференциальное уравнение для $V_i(t, s, \mu)$ в следующем виде:

$$\mu^{K_i}\frac{\partial V_i}{\partial t} = A_i(Y, t, 0)V_i + \left[A_i(X_0(t, \mu), t, 0) - A_i(Y, t, 0)\right]V_i,$$
$$Y = \sum_{j=1}^{i-1} y_j^{(0)}(t\mu^{-K_j})_{(i>1)}.$$

Это уравнение с условием $V_i(s, s, \mu) = E_i$ эквивалентно интегральному уравнению

$$V_i(t,s,\mu) = U_i(t,s,\mu) +$$
$$+\mu^{-K_i}\int_s^t U_i(t,q,\mu)\int_0^1 \left.\frac{\partial A_i(x,q,0)}{\partial x}\right|_{x=Y_\theta} d\theta \sum_{j=i}^{m} y_j^{(0)}\left(q\mu^{-K_j}\right)\cdot V_i(q,s,\mu)dq, \tag{37.3}$$
$$Y_\theta = \sum_{j=1}^{i-1} y_j^{(0)}\left(q\mu^{-K_j}\right)_{(i>1)} + \theta\sum_{j=i}^{m} y_j^{(0)}(q\mu^{-K_j}).$$

Здесь $U_i(t, s, \mu)$ — матрица Коши уравнения (26.9). Существование, единственность и гладкость матрицы $U_i(t, s, \mu)$ следует из гладкости правой части дифференциального уравнения (26.9). Из (33.1), (37.3) и условий 26.2, 26.4, 26.7 следует неравенство

$$\|V_i(t, s, \mu)\| \leqslant \|U_i(t, s, \mu)\| + \\ + \mu^{-K_i} \int\limits_s^t \|U_i(t, q, \mu)\| C \sum_{j=1}^{m} \left\| y_j^{(0)}(q\mu^{-K_j}) \right\| \cdot \|V_i(q, s, \mu)\| \, dq. \qquad (37.4)$$

1) Пусть $\boxed{i = 1}$. Из (28.3)–(28.5), (33.1), (37.4) получим неравенство

$$\|V_1(t, s, \mu)\| \leqslant g_1(t - s) + \\ + \int\limits_s^t C g_1(t - q) \sum_{j=2}^{m} \exp\left\{ -\kappa_{0j} q \mu^{-K_j} \right\} \|V_1(q, s, \mu)\| \, dq, \qquad (37.5)$$

где g_1 — функция (37.1) (с другими, вообще говоря, постоянными. При доказательстве постоянные меняются конечное число раз).

Рассмотрим случаи I, II, IV. Введем обозначение

$$\omega(t) \equiv \begin{cases} \|V_1(t, s, \mu)\|, & \text{I}, \\ \|V_1(t, s, \mu)\| \exp\{\kappa_1 t\}, & \text{II}, \\ \|V_1(t, s, \mu)\| \exp\{-\kappa_1 t\}, & \text{IV}. \end{cases} \qquad (37.6)$$

Тогда из (37.5) следует, что

$$\omega(t) \leqslant g_1(-s) + \int\limits_s^t C \sum_{j=2}^{m} \exp\left\{ -\kappa_{0j} q \mu^{-K_j} \right\} \omega(q) \, dq.$$

Для $\omega(t)$ выполнены условия леммы Гронуолла — Беллмана 13.1, из которой следуют неравенства при $0 \leqslant s \leqslant t$:

$$\omega(t) \leqslant g_1(-s) \exp\left\{ \int\limits_s^t C \sum_{j=2}^{m} \exp\left\{ -\kappa_{0j} q \mu^{-K_j} \right\} dq \right\} \leqslant \\ \leqslant g_1(-s) \exp\left\{ \sum_{j=2}^{m} C \mu^{K_j} \left[\exp\left\{ -\kappa_{0j} s \mu^{-K_j} \right\} - \exp\left\{ -\kappa_{0j} t \mu^{-K_j} \right\} \right] \right\} \leqslant \\ \leqslant g_1(-s), \quad 0 < \mu \leqslant \mu_1 \equiv \bar{\mu}.$$

Отсюда и из (37.6) следует неравенство (37.1) для $\|V_1(t, s, \mu)\|$ в случаях I, II, IV.

Рассмотрим теперь случай III. При $t = s$ из (37.3), (37.5) следуют соотношения $\|V_1(s, s, \mu)\| = 1 \leqslant g_1(0)$. Таким образом, при $t = s$, $0 < \mu \leqslant \bar{\mu}$

$$\|V_1(t, s, \mu)\| < 2g_1(t - s). \tag{37.7}$$

Так как $V_1(t, s, \mu)$ непрерывна, то (37.7) выполняется на некотором непустом множестве $0 \leqslant s \leqslant t < t_1$, $t_1 > 0$. Предположим, что $t_1 < \infty$. Тогда

$$\|V_1(t_1, s, \mu)\| = 2g_1(t_1 - s). \tag{37.8}$$

Из (37.1), (37.5), (37.7) при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_1$ получим

$$\|V_1(t,s,\mu)\| \leqslant g_1(t-s) + \int\limits_s^t Cg_1(t-q)\sum_{j=2}^m \exp\left\{-\kappa_{0j}q\mu^{-K_j}\right\}2g_1(q-s)\,dq \leqslant$$

$$\leqslant g_1(t-s) + 2Cg_1(t-s)\sum_{j=2}^m \int\limits_0^t \exp\{-\kappa_{0j}q\mu^{-K_j}\}g_1(q)\,dq \leqslant$$

$$\leqslant g_1(t-s)\left[1 + 2CC'\sum_{j=2}^m \int\limits_0^t \exp\left\{-\kappa' q\mu^{-K_j}\right\}dq\right] \leqslant$$

$$\leqslant g_1(t-s)\left(1 + C''\sum_{j=2}^m \mu^{K_j}\right).$$

Здесь использована монотонность и положительность функции $g_1(t)$. Постоянная κ' принадлежит интервалу $0 < \kappa' < \min\limits_{j=\overline{2,m}} \kappa_{0j}$. Выберем μ_1 так, чтобы при $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_1$ выполнялось неравенство

$$1 + C''\sum_{j=2}^m \mu^{K_j} < 2.$$

Тогда при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_1$, $\quad 0 < \mu \leqslant \mu_1$ выполняется (37.7). А это противоречит (37.8). Отсюда следует, что $t_1 = \infty$. Таким образом, неравенство (37.1) справедливо и для случая III. Оценки (37.1) при $i = 1$ доказаны.

2) Пусть $\boxed{2 \leqslant i \leqslant m}$. Из (26.10), (33.1), (37.4) следуют неравенства

$$\|V_i(t, s, \mu)\| \leqslant C\exp\left\{-\kappa_i(t-s)\mu^{-K_i}\right\} +$$
$$+ \sum_{j=i}^m \int\limits_s^t C\mu^{-K_i}\exp\left\{-\kappa_i(t-q)\mu^{-K_i} - \kappa_{0j}q\mu^{-K_j}\right\}\|V_i(q, s, \mu)\|\,dq.$$

Обозначим

$$\omega(t) \equiv \|V_i(t, s, \mu)\| \cdot \exp\left\{\kappa_i t\mu^{-K_i}\right\}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\omega(t) \leqslant C \exp\{\kappa_i s\mu^{-K_i}\} + \sum_{j=i}^{m} \int_s^t C\mu^{-K_i} \exp\{-\kappa_{0j} q\mu^{-K_j}\}\omega(q)\, dq.$$

По лемме Гронуолла—Беллмана 13.1

$$\omega(t) \leqslant C \exp\left\{\kappa_i s\mu^{-K_i} + \sum_{j=i}^{m} \int_s^t C\mu^{-K_i} \exp\left\{-\kappa_{0j} q\mu^{-K_j}\right\} dq\right\} =$$

$$= C \exp\left\{\kappa_i s\mu^{-K_i} + \sum_{j=i}^{m} C\mu^{K_j - K_i}\left[\exp\left\{-\kappa_{0j} s\mu^{-K_j}\right\} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \exp\left\{-\kappa_{0j} t\mu^{-K_j}\right\}\right]\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C \exp\{\kappa_i s\mu^{-K_i}\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\mu}.$$

Отсюда получаем оценку (37.1) матрицы Коши:

$$\|V_i(t, s, \mu)\| = \omega(t) \exp\{-\kappa_i t\mu^{-K_i}\} \leqslant C_{1i} \exp\left\{-\kappa_i (t-s)\mu^{-K_i}\right\},$$

$$0 \leqslant s \leqslant t, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\mu}.$$

Неравенства $C_{1i} \geqslant 1$ следуют из (37.1) при $t = s$, так как $\|V_i(s, s, \mu)\| = 1$, $i = \overline{1, m}$.

□

§ 38. Функции G_i

Лемма 38.1. *При выполнении условий теорем* 28.1–28.4 *найдутся значения* δ_2, μ_2, κ'_{0j}, C°_{21}, C_{2k}, $\widetilde{C}_{2ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{2, m}$, $k = \overline{0, n+2}$, *не зависящие от* t, μ *и такие, что* $0 < \mu_2 \leqslant \mu_1$, $0 < \kappa'_{0j} < \kappa_{0j}$ *и при* $\|u\| \leqslant \delta_2$, $\|\widetilde{u}\| \leqslant \delta_2$, $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_2$ *функции* $G_i(u, t, \mu)$, $i = \overline{1, m}$, *существуют, единственны, непрерывны и удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{aligned} &\|G_i(0,t,\mu)\| \leqslant g_{21}(t)\mu^{n+1} + \sum_{j=i+1}^{m} \widetilde{C}_{2ij}\mu^{n+1+K_i-K_j} \exp\{-\kappa'_{0j} t\mu^{-K_j}\}_{(i<m)}, \\ &\|G_i(u,t,\mu) - G_i(\widetilde{u},t,\mu)\| \leqslant \left[C_{20}\|u\| + C_{20}\|\widetilde{u}\| + g_{22}(t,\mu)\right] \|u - \widetilde{u}\|, \end{aligned} \qquad (38.1)$$

$$g_{21}(t) \equiv \begin{cases} C_{21}, & n \geqslant 1, \quad \text{I, II}; \quad n = 0; \\ C_{21}^{\circ} t^{2n(\kappa_1+1)} + C_{21}, & n \geqslant 1, \quad \text{III}; \\ C_{21} \exp\{(n+1)\kappa_1 t\}, & n \geqslant 1, \quad \text{IV}; \end{cases}$$

$$g_{22}(t,\mu) \equiv \begin{cases} C_{22}\mu, & n \geqslant 1, \quad \text{I, II}; \quad n = 0; \\ C_{22}\mu + \sum\limits_{k=1}^{n} C_{2\,k+2} t^{(\kappa_1+1)(2k-1)} \mu^k, & n \geqslant 1, \quad \text{III}; \\ \sum\limits_{k=1}^{n} C_{2k+1} \exp\left\{k\kappa_1 t\right\} \mu^k, & n \geqslant 1, \quad \text{IV}; \end{cases}$$

$$t_*(\mu) \equiv \begin{cases} T, & \text{I}, \\ \infty, & \text{II}, \\ T\mu^{-\chi}, & \text{III}, \\ T - \chi \ln \mu, & \text{IV}. \end{cases}$$

38.1. Существование, единственность и непрерывность функций G_i

Из (36.2) следуют формулы

$$G_i(u,t,\mu) \equiv F_i(Y,t,\mu) - \sum_{k=0}^{n} \frac{dy_{1i}^{(k)}(t)}{dt} \mu^{k+K_i} -$$

$$- \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=2}^{m} \frac{dy_{ji}^{(k)}(\tau_j)}{d\tau_j} \mu^{k+K_i-K_j} - F_{ix}\big(X_0(t,\mu),t,0\big)u,$$

$$Y \equiv u + X_0(t,\mu) + \sum_{k=1}^{n} y_1^{(k)}(t)\mu^k{}_{(n\geqslant 1)} + \tag{38.2}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=2}^{m} y_j^{(k)}(\tau_j)\mu^k{}_{(n\geqslant 1)} + x^{\circ}(\mu) - X_n(0,\mu),$$

$$X_0(t,\mu) = \sum_{j=1}^{m} y_j^{(0)}(\tau_j), \quad i = \overline{1,m}.$$

Из леммы 33.1, равенства $y_1^{(0)}(t) = 0$ и условия 26.7 следует, что множество значений $X_0(t,\mu)$ принадлежит замкнутому множеству $\overline{D}_{x1}$, вложенному в D_x:

$$\left\{x\colon\ x = X_0(t,\mu),\ t \geqslant 0,\ 0 < \mu \leqslant \bar{\mu}\right\} \subset \overline{D}_{x1} \subset D_x. \tag{38.3}$$

Оценим $Y_{1n}(t,\mu) \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} y_1^{(k)}(t)\mu^k{}_{(n\geqslant 1)}$ при $n \geqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \bar{\mu}$, используя (35.1), формулу (38.1) для $t_*(\mu)$ и неравенства для

χ (смотрите формулировки теорем 28.3, 28.4):

$$\text{I, II.}\qquad \|Y_{1n}(t,\mu)\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} C_{k10}\mu^k \leqslant C\mu;$$

$$\text{III.}\qquad \|Y_{1n}(t,\mu)\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left[C^{\circ}_{k10}t^{(\varkappa_1+1)(2k-1)} + C_{k10}\right]\mu^k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k-1}^{n} \left[C\mu^{-\chi(\varkappa_1+1)(2k-1)} + C\right]\mu^k \leqslant C\mu^{1/2}; \tag{38.4}$$

$$\text{IV.}\qquad \|Y_{1n}(t,\mu)\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} C_{k10}\exp\{k\varkappa_1 t\}\mu^k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} C\mu^{k-k\varkappa_1\chi} \leqslant C\mu^{1/(n+2)}.$$

Из (34.1), (36.3), (38.2), (38.4) следуют неравенства

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{m} y_j^{(k)}(\tau_j)\mu^k{}_{(n\geqslant 1)}\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{m} C_{kj0}\exp\{-\varkappa_{kj}\tau_j\}\mu^k{}_{(n\geqslant 1)} \leqslant$$
$$\leqslant C\mu_{(n\geqslant 1)},\quad \tau_j \geqslant 0,$$
$$\|Y - X_0(t,\mu)\| \leqslant \|u\| + C\mu^{\chi_1},\quad 0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu),\quad 0 < \mu \leqslant \tilde{\mu},$$

$$\chi_1 \equiv \begin{cases} 1, & n \geqslant 1,\quad \text{I, II};\quad n = 0;\\ 1/2, & n \geqslant 1,\quad \text{III};\\ 1/(n+2), & n \geqslant 1,\quad \text{IV}. \end{cases}$$

Отсюда и из (38.3) получаем: существуют такие δ_{21}, μ_{21}, что $\delta_{21} > 0$, $0 < \mu_{21} \leqslant \mu_1$ и при $\|u\| \leqslant \delta_{21}$, $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_{21}$ $Y \in D_x$. Отсюда, из условия 26.2, лемм 34.1, 35.1 и из формул (38.2) следует: при $\|u\| \leqslant \delta_{21}$, $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_{21}$ функции $G_i(u,t,\mu)$, $i = \overline{1,m}$, существуют, единственны и непрерывны. □

38.2. Доказательство первого неравенства (38.1)

Из (38.2) получим формулы

$$G_i(0,t,\mu) = F_i\Big(X_n(t,\mu) + x^{\circ}(\mu) - X_n(0,\mu), t, \mu\Big) -$$
$$- \sum_{k=0}^{n} \frac{dy_{1i}^{(k)}(t)}{dt}\mu^{k+K_i} - \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=2}^{m} \frac{dy_{ji}^{(k)}(\tau_j)}{d\tau_j}\mu^{k+K_i-K_j}. \tag{38.5}$$

Из уравнений (23.4) следуют равенства

$$\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{dy_{1i}^{(k)}(t)}{dt}\mu^{k+K_i}\right]^{(\leqslant n)}=\left[f_i(t,\mu)\right]^{(\leqslant n)},$$

$$\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{dy_{ji}^{(k)}(\tau_j)}{d\tau_j}\mu^{k+K_i-K_j}f_{ij}^{\circ}(\mu)\right]^{(\leqslant n)}=\left[f_{ij}(\tau_j,\mu)\right]^{(\leqslant n)},$$

$$f_i(t,\mu)\equiv F_i\left(\sum_{q=0}^{n}y_1^{(q)}(t)\mu^q,t,\mu\right),$$

$$f_{ij}(\tau_j,\mu)\equiv f_{ij}^{\circ}(\mu)\left[F_i\left(\sum_{q=0}^{n}\sum_{l=1}^{j}y_l^{(q)}(\tau_j\mu^{K_j-K_l})\mu^q,\tau_j\mu^{K_j},\mu\right)-\right.$$
$$\left.-F_i\left(\sum_{q=0}^{n}\sum_{l=1}^{j-1}y_l^{(q)}(\tau_j\mu^{K_j-K_l})\mu^q,\tau_j\mu^{K_j},\mu\right)\right],\tag{38.6}$$

$$f_{ij}^{\circ}(\mu)\equiv\begin{cases}1, & j\leqslant i,\\ \mu^{K_j-K_i}, & j>i,\end{cases}\qquad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{2,m}.$$

Здесь $[\ ]^{(\leqslant n)}$ обозначает частичную сумму n-го порядка ряда Маклорена по степеням μ для функции, стоящей в квадратных скобках. Подставим (38.6) в (38.5). Получим

$$G_i(0,t,\mu)=F_i\big(X_n(t,\mu)+x^{\circ}(\mu)-X_n(0,\mu),t,\mu\big)-\left[f_i(t,\mu)\right]^{(\leqslant n)}-$$
$$-\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{dy_{1i}^{(k)}(t)}{dt}\mu^{k+K_i}\right]^{(\geqslant n+1)}-\sum_{j=2}^{i}\left[f_{ij}(\tau_j,\mu)\right]^{(\leqslant n)}{}_{(i\geqslant 2)}-$$
$$-\sum_{j=2}^{i}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{dy_{ji}^{(k)}(\tau_j)}{d\tau_j}\mu^{k+K_i-K_j}\right]^{(\geqslant n+1)}{}_{(i\geqslant 2)}-$$
$$-\sum_{j=i+1}^{m}\mu^{K_i-K_j}\left[f_{ij}(\tau_j,\mu)\right]^{(\leqslant n)}{}_{(i<m)}-$$
$$-\sum_{j=i+1}^{m}\mu^{K_i-K_j}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{dy_{ji}^{(k)}(\tau_j)}{d\tau_j}\mu^{k}\right]^{(\geqslant n+1)}{}_{(i<m)}.\tag{38.7}$$

Здесь $[\ ]^{(\geqslant n+1)}$ обозначает сумму тех слагаемых в квадратных скобках, которые имеют множителем μ^q, $q\geqslant n+1$. Рассмотрим функцию

$$\widetilde{f}\equiv F_i\big(X_n(t,\mu),t,\mu\big)-f_i(t,\mu).$$

Ее можно представить в виде суммы

$$\widetilde{f} = \sum_{j=2}^{i} f_{ij}(\tau_j, \mu)_{\langle i \geqslant 2\rangle} + \sum_{j=i+1}^{m} \mu^{K_i - K_j} f_{ij}(\tau_j, \mu)_{\langle i<m\rangle}.$$

Вычтем и прибавим $\widetilde{f}$ к правой части (38.7). Получим

$$\begin{aligned}
G_i(0, t, \mu) = {} & \left[F_i\big(X_n(t,\mu) + x^\circ(\mu) - X_n(0,\mu), t, \mu\big) - F_i\big(X_n(t,\mu), t, \mu\big)\right] + \\
& + \left\{f_i(t,\mu) - \left[f_i(t,\mu)\right]^{(\leqslant n)}\right\} + \\
& + \sum_{j=2}^{i} \left\{f_{ij}(\tau_j,\mu) - \left[f_{ij}(\tau_j,\mu)\right]^{(\leqslant n)}\right\}_{\langle i\geqslant 2\rangle} + \\
& + \sum_{j=i+1}^{m} \mu^{K_i-K_j}\left\{f_{ij}(\tau_j,\mu) - \left[f_{ij}(\tau_j,\mu)\right]^{(\leqslant n)}\right\}_{\langle i<m\rangle} - \\
& - \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{dy_{1i}^{(k)}(t)}{dt}\mu^{k+K_i}\right]^{(\geqslant n+1)} - \\
& - \sum_{j=2}^{i}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{dy_{ji}^{(k)}(\tau_j)}{d\tau_j}\mu^{k+K_i-K_j}\right]^{(\geqslant n+1)}_{\langle i\geqslant 2\rangle} - \\
& - \sum_{j=i+1}^{m} \mu^{K_i-K_j}\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{dy_{ji}^{(k)}(\tau_j)}{d\tau_j}\mu^{k}\right]^{(\geqslant n+1)}_{\langle i<m\rangle}.
\end{aligned} \tag{38.8}$$

Рассмотрим слагаемые в (38.8).

а) $$\begin{aligned}
& \left\|F_i\big(X_n(t,\mu) + x^\circ(\mu) - X_n(0,\mu), t, \mu\big) - F_i\big(X_n(t,\mu), t, \mu\big)\right\| = \\
& = \left\|\int_0^1 F_{ix}(Y_\theta, t, \mu)\, d\theta \cdot \left[x^\circ(\mu) - X_n(0,\mu)\right]\right\| \leqslant \\
& \leqslant C\left\|x^\circ(\mu) - X_n(0,\mu)\right\| \leqslant C\mu^{n+1},
\end{aligned} \tag{38.9}$$

$$Y_\theta \equiv X_n(t,\mu) + \theta x^\circ(\mu) - \theta X_n(0,\mu).$$

Так же, как в п. 38.1 доказана принадлежность Y множеству D_x, можно доказать: найдется такое значение μ_{22} $(0 < \mu_{22} \leqslant \mu_{21})$, что $Y_\theta \in D_x$ при $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_{22}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Отсюда, из условия 26.2 и неравенства (36.3) следует, что (38.9) имеет место при $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_{22}$.

б) $$\begin{aligned}
f_i(t,\mu) - \left[f_i(t,\mu)\right]^{(\leqslant n)} = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left.\frac{\partial^{n+1} f_i(t,\nu)}{\partial \nu^{n+1}}\right|_{\nu=\widetilde{\mu}} \times \\
\times \theta_2\theta_3^2 \ldots \theta_{n+1}^n \, d\theta_1 \ldots d\theta_{n+1}\mu^{n+1},
\end{aligned} \tag{38.10}$$

$$\widetilde{\mu} = \theta_1 \ldots \theta_{n+1}\mu.$$

При $n = 0$ отсюда и из формулы (38.6) для f_i получим

$$\left\| f_i(t,\mu) - \left[f_i(t,\mu)\right]^{(0)} \right\| = \left\| \int\limits_0^1 \frac{\partial F_i(0,t,\nu)}{\partial \nu}\bigg|_{\nu=\theta\mu} d\theta\mu \right\| \leqslant C\mu, \qquad (38.11)$$

$$0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu), \quad 0 < \mu \leqslant \mu_{23} \equiv \mu_{22}.$$

При $n \geqslant 1$ из формулы (38.6) для f_i следует, что подынтегральное выражение в (38.10) представляет собой линейную комбинацию произведений из следующих сомножителей:

$$\theta_j; \quad \frac{\partial^l F_i(x,t,\nu)}{\partial x^{l_1}\partial \nu^{l_2}}\bigg|_{x=Y_{1n\theta},\nu=\widetilde{\mu}}; \quad \Pi \equiv \prod_{\lambda=1}^{N}\prod_{k=1}^{n}\left[\sum_{q=k}^{n} y_{1\lambda}^{(q)}(t)\widetilde{\mu}^{q-k}\frac{q!}{(q-k)!}\right]^{s_{k\lambda}}.$$

Здесь

$$Y_{1n\theta} \equiv \sum_{q=0}^{n} y_1^{(q)}(t)\widetilde{\mu}^q, \; j = \overline{1, n+1}, \; l = l_1 + l_2 \leqslant n+1, \; s_{k\lambda} \geqslant 0,$$

$$s_1 \equiv \sum_{\lambda=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} k s_{k\lambda} \leqslant n+1.$$

Сомножители в Π возникают при дифференцировании сумм

$$\sum_{q=0}^{n} y_{1\lambda}^{(q)}(t)\mu^q.$$

Из (38.4) следует: найдется такое значение μ_{23} $(0 < \mu_{23} \leqslant \mu_{22})$, что $Y_{1n\theta} \in D_x$ при $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_{23}$, $0 \leqslant \theta_j \leqslant 1$, $j = \overline{1, n+1}$. Поэтому производные от F_i ограничены по норме (по условию 26.2). Оценим Π на множестве $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_{23}$, используя лемму 35.1:

$$\|\Pi\| \leqslant \prod_{\lambda=1}^{N}\prod_{k=1}^{n}\left[\sum_{q=k}^{n} C|y_{1\lambda}^{(q)}(t)|\mu^{q-k}\right]^{s_{k\lambda}}.$$

$$\text{I, II.} \qquad \|\Pi\| \leqslant \prod_{\lambda=1}^{N}\prod_{k=1}^{n}\left[\sum_{q=k}^{n} C\mu^{q-k}\right]^{s_{k\lambda}} \leqslant C.$$

$$(38.12)$$

$$\text{III.} \qquad \|\Pi\| \leqslant \prod_{\lambda=1}^{N}\prod_{k=1}^{n}\left\{\sum_{q=k}^{n}\left[Ct^{(\kappa_1+1)(2q-1)} + C\right]\mu^{q-k}\right\}^{s_{k\lambda}} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{\lambda=1}^{N}\prod_{k=1}^{n}\left[t^{(\kappa_1+1)(2k-1)}\sum_{q=k}^{n} Ct^{2(\kappa_1+1)(q-k)}\mu^{q-k} + C\right]^{s_{k\lambda}}.$$

Используя соотношения $t_*(\mu) = T\mu^{-\chi}$, $0 \leqslant \chi < \left[2(\kappa_1+1)\right]^{-1}$, получим

$$\sum_{q=k}^{n} Ct^{2(\kappa_1+1)(q-k)}\mu^{q-k} \leqslant \sum_{q=k}^{n} C\mu^{(q-k)\left[1-2\chi(\kappa_1+1)\right]} \leqslant C,$$

$$\|\Pi\| \leqslant \prod_{\lambda=1}^{N}\prod_{k=1}^{n}\left[Ct^{(\kappa_1+1)(2k-1)}+C\right]^{s_{k\lambda}} \leqslant Ct^{S}+C,$$

$$S \equiv (\kappa_1+1)\sum_{\lambda=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)s_{k\lambda} = (\kappa_1+1)(2s_1-s_2), \quad s_2 \equiv \sum_{\lambda=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}s_{k\lambda}.$$

Если $s_2 = 0$, то все $s_{k\lambda} = 0$, $\|\Pi\| = 1$. Если $s_2 = 1$, то для одной пары значений (k_*, λ_*) $s_{k_*\lambda_*} = 1$, остальные $s_{k\lambda} = 0$. Поэтому $\|\Pi\| \leqslant Ct^{(\kappa_1+1)(2k_*-1)} + C \leqslant Ct^{(\kappa+1)(2n-1)} + C$. Если $s_2 \geqslant 2$, то, так как $s_1 \leqslant n+1$, справедливы неравенства $S \leqslant (\kappa_1+1)\cdot[2(n+1)-2] = 2n(\kappa_1+1)$, $\|\Pi\| \leqslant Ct^{2n(\kappa_1+1)} + C$. Окончательно,

III. $\|\Pi\| \leqslant Ct^{2n(\kappa_1+1)} + C.$

$$\text{IV.}\quad \|\Pi\| \leqslant \prod_{\lambda=1}^{N}\prod_{k=1}^{n}\left[\sum_{q=k}^{n}C\exp\{q\kappa_1 t\}\mu^{q-k}\right]^{s_{k\lambda}} \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{\lambda=1}^{N}\prod_{k=1}^{n}\exp\left\{ks_{k\lambda}\kappa_1 t\right\}\left[\sum_{q=k}^{n}C\exp\left\{q\kappa_1 t - k\kappa_1 t\right\}\mu^{q-k}\right]^{s_{k\lambda}}. \tag{38.13}$$

Используя соотношения $t_*(\mu) = T - \chi\ln\mu$, $0 \leqslant \chi < (n+1)/[(n+2)\kappa_1]$, получим

$$\sum_{q=k}^{n}C\exp\left\{q\kappa_1 t - k\kappa_1 t\right\}\mu^{q-k} \leqslant \sum_{q=k}^{n}C\mu^{(q-k)(1-\kappa_1\chi)} \leqslant C,$$
$$\|\Pi\| \leqslant \prod_{\lambda=1}^{N}\prod_{k=1}^{n}C\exp\left\{ks_{k\lambda}\kappa_1 t\right\} = C\exp\{s_2\kappa_1 t\} \leqslant$$
$$\leqslant C\exp\left\{(n+1)\kappa_1 t\right\}. \tag{38.14}$$

Из (38.10)–(38.14) следуют неравенства

$$\left\|f_i(t,\mu) - \left[f_i(t,\mu)\right]^{(\leqslant n)}\right\| \leqslant \begin{cases} C\mu^{n+1}, & n\geqslant 1, \quad \text{I, II}; \quad n=0; \\ \left[Ct^{2n(\kappa_1+1)}+C\right]\mu^{n+1}, & n\geqslant 1, \quad \text{III}; \\ C\mu^{n+1}\exp\left\{(n+1)\kappa_1 t\right\}, & n\geqslant 1, \quad \text{IV}; \end{cases}$$

$$0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu), \quad 0 < \mu \leqslant \mu_{23}. \tag{38.15}$$

в) Из (38.6) получим формулы для $f_{ij}(\tau_j,\mu)$:

$$f_{ij}(\tau_j,\mu)=f_{ij}^{\circ}(\mu)\int\limits_0^1 F_{ix}\left(\sum_{q=0}^{n}\sum_{l=1}^{j-1}y_l^{(q)}(\tau_j\mu^{K_j-K_l})\mu^q+\right.$$

$$\left.+\theta\sum_{q=0}^{n}y_j^{(q)}(\tau_j)\mu^q,\tau_j\mu^{K_j},\mu\right)d\theta\sum_{k=0}^{n}y_j^{(k)}(\tau_j)\mu^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\mu^k f_{ij}^{\circ}(\mu)\int\limits_0^1\left\{F_{ix}\left(\sum_{l=1}^{j-1}y_l^{(0)}(\tau_j\mu^{K_j-K_l})+\theta y_j^{(0)}(\tau_j),\tau_j\mu^{K_j},\mu\right)+\right.$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\left[F_{ix}\left(\sum_{q=0}^{s}\sum_{l=1}^{j-1}y_l^{(q)}(\tau_j\mu^{K_j-K_l})\mu^q+\right.\right.$$

$$\left.+\theta\sum_{q=0}^{s}y_j^{(q)}(\tau_j)\mu^q,\tau_j\mu^{K_j},\mu\right)-F_{ix}\left(\sum_{q=0}^{s-1}\sum_{l=1}^{j-1}y_l^{(q)}(\tau_j\mu^{K_j-K_l})\mu^q+\right.$$

$$\left.\left.\left.+\theta\sum_{q=0}^{s-1}y_j^{(q)}(\tau_j)\mu^q,\tau_j\mu^{K_j},\mu\right)\right]_{(n\geqslant 1)}\right\}d\theta\cdot y_j^{(k)}(\tau_j)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}\mu^{k+s}f_{ij}^{\circ}(\mu)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 g_s(\tau_j,\mu,\theta,\widetilde{\theta})d\widetilde{\theta}\,d\theta\cdot y_j^{(k)}(\tau_j), \tag{38.16}$$

$$g_0(\tau_j,\mu,\theta,\widetilde{\theta})\equiv F_{ix}\left(Y_0(\tau_j,\mu,\theta,\widetilde{\theta}),\tau_j\mu^{K_j},\mu\right),$$

$$g_s(\tau_j,\mu,\theta,\widetilde{\theta})\equiv\sum_{\lambda=1}^{N}\left.\frac{\partial^2F_i(x,\tau_j\mu^{K_j},\mu)}{\partial x\partial x_\lambda}\right|_{x=Y_s(\tau_j,\mu,\theta,\widetilde{\theta})}\times$$

$$\times\left[\sum_{l=1}^{j-1}y_{l\lambda}^{(s)}(\tau_j\mu^{K_j-K_l})+\theta y_{j\lambda}^{(s)}(\tau_j)\right],$$

$$Y_0(\tau_j,\mu,\theta,\widetilde{\theta})\equiv\sum_{l=1}^{j-1}y_l^{(0)}(\tau_j\mu^{K_j-K_l})+\theta y_j^{(0)}(\tau_j),$$

$$Y_s(\tau_j,\mu,\theta,\widetilde{\theta})\equiv\sum_{q=0}^{s-1}\sum_{l=1}^{j-1}y_l^{(q)}(\tau_j\mu^{K_j-K_l})\mu^q+$$

$$+\theta\sum_{q=0}^{s-1}y_j^{(q)}(\tau_j)\mu^q+\widetilde{\theta}\sum_{l=1}^{j-1}y_l^{(s)}(\tau_j\mu^{K_j-K_l})\mu^s+\theta\widetilde{\theta}y_j^{(s)}(\tau_j)\mu^s,$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{2, m}, \quad s = \overline{1, n}, \quad n \geqslant 1.$$

Представим теперь остаточный член разложения f_{ij} по степеням μ в следующем виде:

$$f_{ij}(\tau_j, \mu) - \left[f_{ij}(\tau_j, \mu)\right]^{(\leqslant n)} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left\{\mu^{k+s} f^{\circ}_{ij}(\mu)\cdot g_s(\tau_j, \mu, \theta, \widetilde{\theta}) - \right.$$

$$\left. - \left[\mu^{k+s} f^{\circ}_{ij}(\mu)\cdot g_s(\tau_j, \mu, \theta, \widetilde{\theta})\right]^{(\leqslant n)}\right\} d\widetilde{\theta}\, d\theta y_j^{(k)}(\tau_j) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n} \mu^{k+s} f^{\circ}_{ij}(\mu) \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left\{g_s(\tau_j, \mu, \theta, \widetilde{\theta}) - \right.$$

$$\left. - \left[g_s(\tau_j, \mu, \theta, \widetilde{\theta})\right]^{(\leqslant J)}{}_{(J\geqslant 0)}\right\} d\widetilde{\theta}\, d\theta y_j^{(k)}(\tau_j) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n} \mu^{k+s} f^{\circ}_{ij}(\mu) \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \widetilde{f}_{ij} d\widetilde{\theta}\, d\theta y_j^{(k)}(\tau_j), \tag{38.17}$$

$$\widetilde{f}_{ij} \equiv \mu^{J+1}\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \left.\frac{\partial^{J+1} g_s(\tau_j, \nu, \theta, \widetilde{\theta})}{\partial \nu^{J+1}}\right|_{\nu=\widetilde{\mu}_s} \theta_2\theta_3^2\ldots\theta_{J+1}^J\, d\theta_1 \ldots\, d\theta_{J+1 (J\geqslant 0)} +$$

$$+ g_s(\tau_j, \mu, \theta, \widetilde{\theta})_{(J<0)},$$

$$J \equiv \begin{cases} n-k-s, & j \leqslant i, \\ n-k-s-K_j+K_i, & j > i, \end{cases} \quad \widetilde{\mu}_s \equiv \begin{cases} \theta_1\ldots\theta_{J+1}\mu, & J \geqslant 0, \\ \mu, & J < 0. \end{cases}$$

Из формул (38.16) для $g_s(\tau_j, \mu, \theta, \widetilde{\theta})$ следует, что функции $\widetilde{f}_{ij}$ в (38.17) представляют собой линейные комбинации произведений из следующих сомножителей:

$$\theta_d, \theta, \widetilde{\theta}, \mu, \tau_j, \left.\frac{\partial^r F_i(x, \tau, \nu)}{\partial x^{r_1}\partial \tau^{r_2}\partial \nu^{r_3}}\right|_{x=Y_s(\tau_j, \widetilde{\mu}_s, \theta, \widetilde{\theta}), \tau=\widetilde{t}, \nu=\widetilde{\mu}_s}, \left.\frac{d^p y_{l\lambda}^{(q)}(\tau)}{d\tau^p}\right|_{\tau=\widetilde{\tau}_l}, \; y_{j\lambda}^{(q)}(\tau_j),$$

где $d = \overline{1, J+1}$, $r = r_1 + r_2 + r_3 \leqslant n+2$, $p \leqslant n+1-q$, $q = \overline{0, s}$, $l = \overline{1, J-1}$, $\lambda = \overline{1, N}$. При $J \geqslant 0$ $\widetilde{t} = \tau_j\widetilde{\mu}_s^{K_j} = t(\theta_1\ldots\theta_{J+1})^{K_j}$, $\widetilde{\tau}_l = \tau_j\widetilde{\mu}_s^{K_j-K_l} = \tau_l(\theta_1\ldots\theta_{J+1})^{K_j-K_l}$; при $J < 0$ $\widetilde{t} = t$, $\widetilde{\tau}_l = \tau_l$. Здесь неравенство для p получено с помощью неравенств $q \leqslant s$, $p \leqslant J+1 \leqslant n-k-s+1 \leqslant n-s+1 \leqslant n-q+1$. Так же, как в п. 38.1 доказана принадлежность Y множеству D_x, можно доказать: существует такое значение $\mu_{24}, 0 < \mu_{24} \leqslant \mu_{23}$, что $Y_s(\tau_j, \widetilde{\mu}_s, \theta, \widetilde{\theta}) \in D_x$ при $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_{24}$, $0 \leqslant \theta_q \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $0 \leqslant \widetilde{\theta} \leqslant 1$, $q = \overline{1, J+1}$, $s = \overline{0, n}$. Поэтому производные от F_i ограничены по норме (по условию

26.2). Из леммы 34.1 следует, что сомножители $d^p y_{l\lambda}^{(q)}(\tau)/d\tau^p|_{\tau=\widetilde{\tau}_l \langle l\geqslant 2\rangle}$, $y_{j\lambda}^{(q)}(\tau_j)$ ограничены по модулю. Из леммы 35.1 следует, что сомножители $d^p y_{1\lambda}^{(q)}(\tau)/d\tau^p|_{\tau=\widetilde{\tau}_1}$ при $q \geqslant 1$ ограничены по модулю: 1) постоянной в случаях I, II, 2) полиномом от $\tau_1 = \tau_j \mu^{K_j}$ в случае III, 3) экспоненциальной функцией $C\exp\{C\tau_1\} = C\exp\{C\tau_j\mu^{K_j}\}$ в случае IV. $y_1^{(0)}(t) = 0$ по условию 26.5. Отсюда и из (38.6), (38.17) следуют неравенства

$$\|\widetilde{f}_{ij}\| \leqslant \widehat{f}_{ij}\cdot(C\tau_j^C + C)(\mu^{J+1}\langle J\geqslant 0\rangle + 1\langle J<0\rangle),$$
$$\mu^{k+s+J+1} f_{ij}^{\circ}(\mu)\langle J\geqslant 0\rangle = \mu^{n+1},$$

$$\mu^{k+s} f_{ij}^{\circ}(\mu)\langle J<0\rangle = \mu^{k+s}\langle j\leqslant i, k+s>n\rangle + \\ + \mu^{k+s+K_j-K_i}\langle j>i, k+s+K_j-K_i>n\rangle < \mu^{n+1},$$

$$\left\|f_{ij}(\tau_j,\mu) - \left[f_{ij}(\tau_j,\mu)\right]^{(\leqslant n)}\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}\mu^{n+1}(C\tau_j^C + C)\cdot\widehat{f}_{ij}(\tau_j,\mu)\cdot\|y_j^{(k)}(\tau_j)\| \leqslant \\ \leqslant \mu^{n+1}(C\tau_j^C + C)\exp\{-\varkappa_{0j}\tau_j\}\cdot\widehat{f}_{ij}(\tau_j,\mu),$$

$$\widehat{f}_{ij}(\tau_j,\mu) \equiv \begin{cases} 1, & n\geqslant 1, \quad \text{I, II}; \quad n=0; \\ C(\tau_j\mu^{K_j})^C + C, & n\geqslant 1, \quad \text{III}; \\ \exp\{C\tau_j\mu^{K_j}\}, & n\geqslant 1, \quad \text{IV}. \end{cases}$$

Выберем $\varkappa_{0j}'$ из интервала $(0, \min\limits_{k=\overline{0,n}} \varkappa_{kj})$. Из формул следует, что существует такое значение μ_{25}, $0 < \mu_{25} \leqslant \mu_{24}$, что при $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_{25}$ справедливо неравенство

$$\left\|f_{ij}(\tau_j,\mu) - \left[f_{ij}(\tau_j,\mu)\right]^{(\leqslant n)}\right\| \leqslant C\mu^{n+1}\exp\{-\varkappa_{0j}'\tau_j\}.$$

Отсюда получаем оценку слагаемых в (38.8):

$$\left\|\sum_{j=2}^{i}\left\{f_{ij}(\tau_j,\mu) - \left[f_{ij}(\tau_j,\mu)\right]^{(\leqslant n)}\right\}\langle i\geqslant 2\rangle + \right. \\ \left. + \sum_{j=i+1}^{m}\mu^{K_i-K_j}\left\{f_{ij}(\tau_j,\mu) - \left[f_{ij}(\tau_j,\mu)\right]^{(\leqslant n)}\right\}\langle i<m\rangle\right\| \leqslant \\ \leqslant \sum_{j=2}^{i} C\mu^{n+1}\exp\{-\varkappa_{0j}'\tau_j\}\langle i\geqslant 2\rangle + \\ + \sum_{j=i+1}^{m} C\mu^{n+1+K_i-K_j}\exp\{-\varkappa_{0j}'\tau_j\}\langle i<m\rangle, \tag{38.18}$$

$$0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu), \quad 0 < \mu \leqslant \mu_{25}.$$

г) Используя лемму 35.1, оценим при $i = \overline{1, m}$, $n \geqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_{25}$ следующую сумму в (38.8):

$$\left\| \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{dy_{1i}^{(k)}(t)}{dt} \mu^{k+K_i} \right]^{(\geqslant n+1)} \right\| \leqslant \begin{cases} C\mu^{n+1}, & \text{I,II}, \\ \left[Ct^{(2n-1)(\kappa_1+1)} + C\right]\mu^{n+1}, & \text{III}, \\ C\mu^{n+1}\exp\{n\kappa_1 t\}, & \text{IV}. \end{cases} \tag{38.19}$$

При $n = 0$ эта сумма равна нулю, так как $y_1^{(0)}(t) = 0$ по условию 26.5.
д) Оценку последних слагаемых в (38.8) получим, используя лемму 34.1 и неравенства $0 < \kappa_{0j}' < \kappa_{kj}$ $(k = \overline{0, n})$:

$$\begin{gathered}
\left\| \sum_{j=2}^{i} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{dy_{ji}^{(k)}(\tau_j)}{d\tau_j} \mu^{k+K_i-K_j} \right]^{(\geqslant n+1)}_{\langle i \geqslant 2 \rangle} + \right. \\
\left. + \sum_{j=i+1}^{m} \mu^{K_i-K_j} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{dy_{ji}^{(k)}(\tau_j)}{d\tau_j} \mu^{k} \right]^{(\geqslant n+1)}_{\langle i<m \rangle} \right\| \leqslant \\
\leqslant \sum_{j=2}^{i} \mu^{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left\| \frac{dy_{ji}^{(k)}(\tau_j)}{d\tau_j} \right\|_{\langle i \geqslant 2 \rangle} + \\
+ \sum_{j=i+1}^{m} \mu^{n+1+K_i-K_j} \sum_{k=0}^{n} \left\| \frac{dy_{ji}^{(k)}(\tau_j)}{d\tau_j} \right\|_{\langle i<m \rangle} \leqslant \\
\leqslant \sum_{j=2}^{i} C\mu^{n+1} \exp\{-\kappa_{0j}'\tau_j\}_{\langle i \geqslant 2 \rangle} + \sum_{j=i+1}^{m} \mu^{n+1+K_i-K_j} \exp\{-\kappa_{0j}'\tau_j\}_{\langle i<m \rangle}, \\
0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu), \quad 0 < \mu \leqslant \mu_{25}.
\end{gathered} \tag{38.20}$$

Из (38.8), (38.9), (38.15), (38.18)–(38.20) следует справедливость первого неравенства (38.1). □

38.3. Доказательство второго неравенства (38.1)

Из (38.2) получим следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\Delta G_i \equiv G_i(u, t, \mu) - G_i(\widetilde{u}, t, \mu) = \\
= \big[F_i\big(u + X_n(t, \mu) + x^\circ(\mu) - X_n(0, \mu), t, \mu\big) - \\
- F_i\big(\widetilde{u} + X_n(t, \mu) + x^\circ(\mu) - X_n(0, \mu), t, \mu\big)\big] - \\
- F_{ix}\big(X_0(t, \mu), t, 0\big)(u - \widetilde{u}) =
\end{aligned} \tag{38.21}$$

$$= \int_0^1 \Big[F_{ix}\big(\theta u + (1-\theta)\widetilde{u} + X_n(t,\mu) + x^\circ(\mu) - X_n(0,\mu), t, \mu\big) -$$

$$- F_{ix}\big(X_0(t,\mu), t, 0\big)\Big]\, d\theta \cdot (u - \widetilde{u}) =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \Bigg\{ \sum_{\lambda=1}^{N} \frac{\partial^2 F_i(x,t,\theta_1\mu)}{\partial x \partial x_\lambda}\bigg|_{x=\widetilde{Y}} \Big[\theta u_\lambda + (1-\theta)\widetilde{u}_\lambda +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_{j\lambda}^{(k)}(\tau_j)\mu^k{}_{(n\geqslant 1)} + x_\lambda^\circ(\mu) - X_{n\lambda}(0,\mu)\Big] +$$

$$+ \frac{\partial^2 F_i(x,t,\nu)}{\partial x \partial \nu}\bigg|_{x=\widetilde{Y},\nu=\theta_1\mu} \mu \Bigg\}\, d\theta_1\, d\theta \cdot (u - \widetilde{u}),$$

$$\widetilde{Y} \equiv \theta\theta_1 u + (1-\theta)\theta_1\widetilde{u} + X_0(t,\mu) + \theta_1 \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j^{(k)}(\tau_j)\mu^k{}_{(n\geqslant 1)} +$$

$$+ \theta_1 x^\circ(\mu) - \theta_1 X_n(0,\mu).$$

Так же, как в п. 38.1 доказана принадлежность Y множеству D_x, можно доказать: существуют такие значения δ_2, μ_2 $\big(0 < \delta_2 \leqslant \delta_{21}, 0 < \mu_2 \leqslant \mu_{25}\big)$, что $\widetilde{Y} \in D_x$ при $\|u\| \leqslant \delta_2$, $\|\widetilde{u}\| \leqslant \delta_2$, $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$. Поэтому производные от F_i в (38.21) ограничены по норме (по условию 26.2). Из (34.1), (35.1), (36.3), (38.21) получим неравенства

$$\|\Delta G_i\| \leqslant \Bigg\{ \sum_{\lambda=1}^{N} C \Bigg[|u_\lambda| + |\widetilde{u}_\lambda| + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |y_{j\lambda}^{(k)}(\tau_j)|\mu^k{}_{(n\geqslant 1)} +$$

$$+ \Big|x_\lambda^\circ(\mu) - X_{n\lambda}(0,\mu)\Big| \Bigg] + C\mu \Bigg\} \cdot \|u - \widetilde{u}\| \leqslant$$

$$\leqslant \Bigg[C_{20}\Big(\|u\| + \|\widetilde{u}\|\Big) + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{g}_k(t)\mu^k{}_{(n\geqslant 1)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{m} C\exp\{-\kappa_{kj}\tau_j\}\mu^k{}_{(n\geqslant 1)} + C\mu^{n+1} + C\mu \Bigg] \cdot \|u - \widetilde{u}\|,$$

$$\widetilde{g}_k(t) \equiv \begin{cases} C, & n \geqslant 1, \quad \text{I, II}, \\ Ct^{(\kappa_1+1)(2k-1)} + C, & n \geqslant 1, \quad \text{III}, \\ C\exp\{k\kappa_1 t\}, & n \geqslant 1, \quad \text{IV}. \end{cases}$$

Отсюда следует справедливость второго неравенства в (38.1). Лемма 38.1 доказана.

§ 39. Функции a, b, c

Лемма 39.1. *При выполнении условий теорем* 28.1–28.4 *найдутся значения* μ_3, C_{3i}, $i=\overline{1,3}$, C_{31}°, C_{33}°, *не зависящие от* t, μ *и такие, что* $0<\mu_3\leqslant\mu_2$ *и при* $0\leqslant t\leqslant t_*(\mu), 0<\mu\leqslant\mu_3$ *функции* $a(t,\mu)$, $b(t,\mu)$, $c(t,\mu)$, *задаваемые формулами* (28.7), (36.2), *существуют, единственны, непрерывны и удовлетворяют неравенствам*

$$a(t,\mu)\leqslant g_{31}(t),\quad b(t,\mu)\leqslant g_{32}(\mu),\quad c(t,\mu)\leqslant g_{33}(t)\mu^{n+1}. \tag{39.1}$$

$$g_{31}(t)\equiv\begin{cases} C_{31}, & \text{I, II},\\ C_{31}^{\circ}t^{\kappa_1+1}+C_{31}, & \text{III},\\ C_{31}\exp\{\kappa_1 t\}, & \text{IV},\end{cases}\qquad g_{32}(\mu)\equiv\begin{cases} C_{32}\mu, & \text{I, II},\\ C_{32}\mu^{1-2\chi(\kappa_1+1)}, & \text{III},\\ -C_{32}\mu^{1-\kappa_1\chi}\ln\mu, & \text{IV},\end{cases}$$

$$g_{33}(t)\equiv\begin{cases} C_{33}, & \text{I, II},\\ C_{33}^{\circ}t^{(2n+1)(\kappa_1+1)}+C_{33}, & \text{III},\\ C_{33}\exp\big\{(n+1)\kappa_1 t\big\}, & \text{IV},\end{cases}\qquad t_*(\mu)=\begin{cases} T, & \text{I},\\ \infty, & \text{II},\\ T\mu^{-\chi}, & \text{III},\\ T-\chi\ln\mu, & \text{IV}.\end{cases}$$

Утверждение 39.1. *На множестве* $t\in D_t$, $s\in D_t$, $0\leqslant s\leqslant t$, $0<\mu\leqslant\mu_1$ *функции* $B_{1jl}(t,s,\mu)$, $P_{1jl}(t,s,\mu)$, $j=\overline{1,m}$, $l=\overline{1,m}$, *задаваемые формулами* (28.7), (36.2), *существуют, единственны, непрерывны и удовлетворяют соотношениям*

$$B_{1jj}(t,s,\mu)=0,\quad j=\overline{1,m}; \tag{39.2}$$

$$\|B_{11l}(t,s,\mu)\|\leqslant\mu^{K_l}g_1(t-s)\left[C+\sum_{q=2}^{m}C\mu^{-K_q}\exp\big\{-\kappa_{0q}s\mu^{-K_q}\big\}\right],\quad l=\overline{2,m};$$

$$\|B_{1jl}(t,s,\mu)\|\leqslant C\mu^{-K_j}\exp\big\{-\kappa_j(t-s)\mu^{-K_j}\big\},\quad j=\overline{2,m},\quad l=\overline{1,j-1};$$

$$\|B_{1jl}(t,s,\mu)\|\leqslant\mu^{K_l-2K_j}\exp\big\{-\kappa_j(t-s)\mu^{-K_j}\big\}\times$$
$$\times\left[C+\sum_{q=j+1}^{m}C\mu^{K_j-K_q}\exp\big\{-\kappa_{0q}s\mu^{-K_q}\big\}\right],$$

$$j=\overline{2,m-1},\quad l=\overline{j+1,m};$$

$$P_{1jl}(t,s,\mu)=0,\quad j=\overline{2,m},\quad l=\overline{1,j-1};$$

$$\|P_{11l}(t,s,\mu)\|\leqslant g_1(t-s),\quad l=\overline{1,m};$$

$$\|P_{1jl}(t,s,\mu)\|\leqslant C\mu^{-K_j}\exp\big\{-\kappa_j(t-s)\mu^{-K_j}\big\},\quad j=\overline{2,m},\quad l=\overline{j,m}.$$

Функция $g_1(t)$ *задается формулами* (37.1) (*вообще говоря, с другими, чем в* (37.1), *постоянными*).

Доказательство. Из (28.7), (26.1), (36.2) следуют формулы

$$\begin{gathered}
B_{jl*}(t,\mu)=\left[\frac{\partial F_j}{\partial x_l}-\frac{\partial F_j}{\partial(x_{j+1}\dots x_m)}H_j\frac{\partial(F_{j+1}\dots F_m)}{\partial x_l}{}_{(j<m)}\right]\big(X_0(t,\mu),t,0\big),\\
j=\overline{1,m},\quad l=\overline{1,j};\\
(P_{jj+1*}\dots P_{jm*})(t,\mu)=-\left[\frac{\partial F_j}{\partial(x_{j+1}\dots x_m)}H_j\right]\big(X_0(t,\mu),t,0\big),\\
\frac{\partial}{\partial t}\Big[(P_{jj+1*},\dots,P_{jm*})(t,\mu)\Big]=\\
=-\sum_{d=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_d}\left[\frac{\partial F_j(x,t,0)}{\partial(x_{j+1}\dots x_m)}H_j(x,t,0)\right]_{x=X_0(t,\mu)}\sum_{q=2}^{m}\frac{dy_{qd}^{(0)}(\tau_q)}{d\tau_q}\mu^{-K_q}-\\
-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial F_j\big(X_0(t,\mu),t,0\big)}{\partial(x_{j+1}\dots x_m)}H_j\big(X_0(t,\mu),t,0\big)\right],\quad j=\overline{1,m-1},\\
H_j(x,t,\mu)=\left[\frac{\partial(F_{j+1}\dots F_m)}{\partial(x_{j+1}\dots x_m)}\right]^{-1}(x,t,\mu),\quad X_0(t,\mu)=\sum_{j=1}^{m}y_j^{(0)}(\tau_j).
\end{gathered}\tag{39.3}$$

Здесь использовано равенство $y_1^{(0)}(t)=0$. Из условия 26.7 следует, что при $t\in D_t$, $0<\mu\leqslant\bar\mu$ $X_0(t,\mu)\in D_x$. Отсюда, из условий 26.2, 26.4 и леммы 33.1 получаем неравенства

$$\|B_{jl*}(t,\mu)\|\leqslant C,\quad j=\overline{1,m},\quad l=\overline{1,j};\tag{39.4}$$

$$\|P_{jl*}(t,\mu)\|\leqslant C,\quad\left\|\frac{\partial P_{jl*}(t,\mu)}{\partial t}\right\|\leqslant C+\sum_{q=2}^{m}C\mu^{-K_q}\exp\{-\kappa_{0q}\tau_q\},$$

$$j=\overline{1,m-1},\quad l=\overline{j+1,m};\quad t\in D_t,\quad 0<\mu\leqslant\bar\mu.$$

Из (28.7), (39.3) и леммы 37.1 следует, что при $t\in D_t$, $s\in D_t, 0\leqslant s\leqslant t$, $0<\mu\leqslant\mu_1$ функции $B_{1jl}(t,s,\mu)$, $P_{1jl}(t,s,\mu)$ существуют, единственны, непрерывны и удовлетворяют соотношениям

$$B_{1jj}(t,s,\mu)=0,\quad j=\overline{1,m};$$

$$\|B_{11l}(t,s,\mu)\|\leqslant\mu^{K_l}\|V_1(t,s,\mu)\|\cdot\left[\|B_{11*}(s,\mu)\|\cdot\|P_{1l*}(s,\mu)\|+\left\|\frac{\partial P_{1l*}(s,\mu)}{\partial s}\right\|\right],$$

$$l=\overline{2,m};$$

$$\|B_{1jl}(t,s,\mu)\|\leqslant\mu^{-K_j}\|V_j(t,s,\mu)\|\cdot\|B_{jl*}(s,\mu)\|,\quad j=\overline{2,m},\quad l=\overline{1,j-1};$$

$$\begin{gathered}
\|B_{1jl}(t,s,\mu)\|\leqslant\mu^{K_l-2K_j}\|V_j(t,s,\mu)\|\cdot\Big[\|B_{jj*}(s,\mu)\|\cdot\|P_{jl*}(s,\mu)\|+\\
+\mu^{K_j}\left\|\frac{\partial P_{jl*}(s,\mu)}{\partial s}\right\|\Big],\quad j=\overline{2,m-1},\quad l=\overline{j+1,m};
\end{gathered}$$

$$P_{1jl}(t, s, \mu) = 0, \quad j = \overline{2, m}, \quad l = \overline{1, j-1};$$
$$\|P_{1jj}(t, s, \mu)\| = \mu^{-K_j}\|V_j(t, s, \mu)\|, \quad j = \overline{1, m};$$
$$\|P_{1jl}(t, s, \mu)\| = \mu^{-K_j}\|V_j(t, s, \mu)\| \cdot \|P_{jl*}(s, \mu)\|,$$
$$j = \overline{1, m-1}, \quad l = \overline{j+1, m}.$$

Отсюда, из (37.1), (39.4) следуют соотношения (39.2). □

Утверждение 39.2. *Найдется такое значение μ_{31}, $0 < \mu_{31} \leqslant \mu_2$, что при $t \in D_t$, $s \in D_t$, $0 \leqslant s \leqslant t$, $0 < \mu \leqslant \mu_{31}$ функции $B_{2jl}(t, s, \mu)$, $P_{2jl}(t, s, \mu)$, $j = \overline{2, m}$, $l = \overline{1, m}$, задаваемые формулами* (28.7), (36.2), *существуют, единственны, непрерывны и удовлетворяют соотношениям*

$$B_{2j1}(t, s, \mu) = 0, \quad j = \overline{2, m}; \tag{39.5}$$

$$\|B_{2jl}(t, s, \mu)\| \leqslant \mu^{K_l} g_1(t-s)\Big[C + \sum_{q=2}^{m} C\mu^{-K_q} \exp\{-\kappa_{0q} s \mu^{-K_q}\}\Big] + g_{2jl}(t, s, \mu),$$
$$j = \overline{2, m}, \quad l = \overline{2, m};$$
$$\|P_{2jl}(t, s, \mu)\| \leqslant g_1(t-s) + C\mu^{-K_j} \exp\big\{-\kappa_j(t-s)\mu^{-K_j}\big\}_{(l \geqslant j)},$$
$$j = \overline{2, m}, \quad l = \overline{1, m};$$
$$g_{2jl}(t, s, \mu) \equiv \begin{cases} C\mu^{-K_j} \exp\big\{-\kappa_j(t-s)\mu^{-K_j}\big\}, \quad 2 \leqslant l < j \leqslant m, \\ C \exp\big\{-\kappa_j(t-s)\mu^{-K_j}\big\}, \quad 2 \leqslant l = j \leqslant m, \\ \mu^{K_l - 2K_j} \exp\big\{-\kappa_j(t-s)\mu^{-K_j}\big\} \times \\ \quad \times \Big[C + \sum\limits_{q=j+1}^{m} C\mu^{K_j - K_q} \exp\big\{-\kappa_{0q} s\mu^{-K_q}\big\}\Big], \\ 2 \leqslant j < l \leqslant m. \end{cases}$$

Функция $g_1(t)$ задается формулами (37.1) (*вообще говоря, с другими, чем в* (37.1), *постоянными коэффициентами*).

Доказательство. Из (28.7) получим следующие формулы:

$$B_{2jl}(t, s, \mu) = B_{1jl}(t, s, \mu)_{(l>1)} - \mu^{K_l} B_{1j1}(t, s, \mu) \cdot P_{1l*}(s, \mu)_{(l>1)} +$$
$$+ \int_s^t B_{1j1}(t, r, \mu) \cdot B_{11l}(r, s, \mu)\, dr,$$

$$P_{2jl}(t, s, \mu) = P_{1jl}(t, s, \mu) + \int_s^t B_{1j1}(t, r, \mu) \cdot P_{11l}(r, s, \mu)\, dr,$$
$$j = \overline{2, m}, \quad l = \overline{1, m}.$$

Отсюда, из (39.3) и из утверждения 39.1 следует, что при $t \in D_t$, $s \in D_t$, $0 \leqslant s \leqslant t$, $0 < \mu \leqslant \mu_1$ функции $B_{2jl}(t, s, \mu)$, $P_{2jl}(t, s, \mu)$ существуют, единственны, непрерывны и удовлетворяют соотношениям

$$B_{2j1}(t,s,\mu)=0, \quad j=\overline{2,m};$$

$$\|B_{2jl}(t,s,\mu)\| \leqslant \|B_{1jl}(t,s,\mu)\| + \mu^{K_l}\|B_{1j1}(t,s,\mu)\|\cdot\|P_{1l*}(s,\mu)\| +$$

$$+\int_s^t \|B_{1j1}(t,r,\mu)\|\cdot\|B_{11l}(r,s,\mu)\|\,dr \leqslant$$

$$\leqslant C\mu^{-K_j}\exp\left\{-\kappa_j(t-s)\mu^{-K_j}\right\}_{(l<j)} +$$

$$+\mu^{K_l-2K_j}\exp\left\{-\kappa_j(t-s)\mu^{-K_j}\right\}\times$$

$$\times\left[C+\sum_{q=j+1}^{m} C\mu^{K_j-K_q}\exp\left\{-\kappa_{0q}s\mu^{-K_q}\right\}\right]_{(l>j)} +$$

$$+C\mu^{K_l-K_j}\exp\{-\kappa_j(t-s)\mu^{-K_j}\} +$$

$$+\int_s^t C\mu^{K_l-K_j}\exp\left\{-\kappa_j(t-r)\mu^{-K_j}\right\}g_1(r-s)\,dr\times$$

$$\times\left[C+\sum_{q=2}^{m} C\mu^{-K_q}\exp\{-\kappa_{0q}s\mu^{-K_q}\}\right],$$

$$j=\overline{2,m}, \quad l=\overline{2,m};$$

$$\|P_{2jl}(t,s,\mu)\| \leqslant \|P_{1jl}(t,s,\mu)\| + \int_s^t \|B_{1j1}(t,r,\mu)\|\cdot\|P_{11l}(r,s,\mu)\|\,dr \leqslant$$

$$\leqslant C\mu^{-K_j}\exp\left\{-\kappa_j(t-s)\mu^{-K_j}\right\}_{(l\geqslant j)} +$$

$$+\int_s^t C\mu^{-K_j}\exp\left\{-\kappa_j(t-r)\mu^{-K_j}\right\}g_1(r-s)\,dr,$$

$$j=\overline{2,m}, \quad l=\overline{1,m}.$$

После вычисления интегралов нетрудно показать, что найдется такое значение μ_{31}, $0<\mu_{31}\leqslant\mu_2$, что при $t\in D_t$, $s\in D_t$, $0\leqslant s\leqslant t$, $0<\mu\leqslant\mu_{31}$ справедливы соотношения (39.5). □

Утверждение 39.3. *Найдется такое значение μ_{32}, что $0<\mu_{32}\leqslant\mu_{31}$ и при $0\leqslant s\leqslant t\leqslant t_*(\mu)$, $0<\mu\leqslant\mu_{32}$ функции $B_{ijl}(t,s,\mu)$, $P_{ijl}(t,s,\mu)$, $i=\overline{2,m}$, $j=\overline{i,m}$, $l=\overline{1,m}$, задаваемые формулами* (28.7), (36.2), *существуют, единственны, непрерывны и удовлетворяют соотношениям*

$$B_{ij1}(t,s,\mu)=0, \quad i=\overline{2,m}, \quad j=\overline{i,m}; \tag{39.6}$$

$$\|B_{ijl}(t,s,\mu)\| \leqslant \mu^{K_l} \cdot g'(t-s)\Big[C + \sum_{q=2}^{m} C\mu^{-K_q} \exp\{-\kappa'_{0q} s\mu^{-K_q}\}\Big] +$$

$$+ \sum_{q=2}^{Q} C\mu^{K_l - 2K_q} \exp\big\{-\kappa'_q(t-s)\mu^{-K_q}\big\} \times$$

$$\times \Big[C + \sum_{d=q+1}^{m} C\mu^{K_q - K_d} \exp\{-\kappa'_{0d} s\mu^{-K_d}\}\Big]_{\langle Q\geqslant 2\rangle} + g_{ijl}(t,s,\mu),$$

$$i = \overline{2,m}, \quad j = \overline{i,m}, \quad l = \overline{2,m};$$

$$\|P_{ijl}(t,s,\mu)\| \leqslant g'(t-s) + C\mu^{-K_j} \exp\big\{-\kappa'_j(t-s)\mu^{-K_j}\big\}_{\langle l\geqslant j\rangle} +$$

$$+ \sum_{q=2}^{i-1} C\mu^{-K_q} \exp\big\{-\kappa'_q(t-s)\mu^{-K_q}\big\}_{\langle l\geqslant i\geqslant 3\rangle}, \quad i = \overline{2,m},$$

$$j = \overline{i,m}, \quad l = \overline{1,m};$$

$$Q \equiv \min\{i,l\} - 1, \quad g'(t) \equiv \begin{cases} C, & \text{I},\\ C\exp\{-\kappa'_1 t\}, & \text{II},\\ Ct^{\kappa_1} + C, & \text{III},\\ C\exp\{\kappa_1 t\}, & \text{IV},\end{cases}$$

$$g_{ijl}(t,s,\mu) \equiv \begin{cases} C\mu^{-K_{l-1}} \exp\big\{-\kappa'_l(t-s)\mu^{-K_l}\big\}, & l < i,\\ C\mu^{-K_j} \exp\big\{-\kappa'_j(t-s)\mu^{-K_j}\big\}, & i \leqslant l < j,\\ C\mu^{-K_{i-1}} \exp\big\{-\kappa'_j(t-s)\mu^{-K_j}\big\}, & i \leqslant l = j,\\ \mu^{K_l - 2K_j} \exp\big\{-\kappa'_j(t-s)\mu^{-K_j}\big\}\times & \\ \quad \times\Big[C + \sum\limits_{q=j+1}^{m} C\mu^{K_j - K_q} \exp\big\{-\kappa'_{0q} s\mu^{-K_q}\big\}\Big], & \\ i \leqslant l, \quad j < l. & \end{cases}$$

Здесь $t_*(\mu)$ *— функция* (39.1), κ'_{0q}, κ'_j *— произвольные положительные числа, меньшие чисел* κ_{0q}, κ_j *из утверждения* 39.2.

Доказательство. Предположим, что утверждение 39.3 справедливо для какого-либо значения i, $2 \leqslant i < m$, при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu'$. Тогда из (28.7), (39.3), (39.4) следует, что при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu'$ функции $B_{i+1jl}(t,s,\mu)$, $P_{i+1jl}(t,s,\mu)$ $\big(j = \overline{i+1,m},\ l = \overline{1,m}\big)$ существуют, единственны, непрерывны и удовлетворяют соотношениям

$$B_{i+1j1}(t,s,\mu) = 0, \quad j = \overline{i+1,m}; \tag{39.7}$$

$$\|B_{i+1jl}(t,s,\mu)\| \leqslant \|B_{ijl}(t,s,\mu)\|_{\langle l\neq i\rangle} + \mu^{K_l - K_i}\|B_{iji}(t,s,\mu)\|\cdot\|P_{il*}(s,\mu)\|_{\langle l>i\rangle} +$$

$$+ \int_s^t \|B_{iji}(t,r,\mu)\|\cdot\|B_{iil}(r,s,\mu)\|\,dr \leqslant$$

$$\leqslant \Big\{\mu^{K_l} g^l(t-s)\Big[C+\sum_{q=2}^{m} C\mu^{-K_q}\exp\{-\varkappa_{0q}^l s\mu^{-K_q}\}\Big]+$$

$$+\sum_{q=2}^{Q} C\mu^{K_l-2K_q}\exp\big\{-\varkappa_q^l(t-s)\mu^{-K_q}\big\}\times$$

$$\times\Big[C+\sum_{d=q+1}^{m} C\mu^{K_q-K_d}\exp\big\{-\varkappa_{0d}^l s\mu^{-K_d}\big\}\Big]_{(Q\geqslant 2)}+g_{ijl}(t,s,\mu)\Big\}_{(l\neq i)}+$$

$$+\Big\{\mu^{K_l} g^l(t-s)\Big[C+\sum_{q=2}^{m} C\mu^{-K_q}\exp\{-\varkappa_{0q}^l s\mu^{-K_q}\}\Big]+$$

$$+\sum_{q=2}^{i-1} C\mu^{K_l-2K_q}\exp\big\{-\varkappa_q^l(t-s)\mu^{-K_q}\big\}\times$$

$$\times\Big[C+\sum_{d=q+1}^{m} C\mu^{K_q-K_d}\exp\big\{-\varkappa_{0d}^l s\mu^{-K_d}\big\}\Big]_{(i\geqslant 3)}+$$

$$+C\mu^{K_l-K_i-K_j}\exp\big\{-\varkappa_j^l(t-s)\mu^{-K_j}\big\}\Big\}_{(l>i)}+$$

$$+\int_s^t\Big\{\mu^{K_i} g^l(t-\tau)\Big[C+\sum_{q=2}^{m} C\mu^{-K_q}\exp\big\{-\varkappa_{0q}^l \tau\mu^{-K_q}\big\}\Big]+$$

$$+\sum_{q=2}^{i-1} C\mu^{K_i-2K_q}\exp\big\{-\varkappa_q^l(t-\tau)\mu^{-K_q}\big\}\times$$

$$\times\Big[C+\sum_{d=q+1}^{m} C\mu^{K_q-K_d}\exp\big\{-\varkappa_{0d}^l \tau\mu^{-K_d}\big\}\Big]_{(i\geqslant 3)}+$$

$$+C\mu^{-K_j}\exp\big\{-\varkappa_j^l(t-\tau)\mu^{-K_j}\big\}\Big\}\times$$

$$\times\Big\{\mu^{K_l} g^l(\tau-s)\Big[C+\sum_{d=2}^{m} C\mu^{-K_d}\exp\big\{-\varkappa_{0d}^l s\mu^{-K_d}\big\}\Big]+$$

$$+\sum_{d=2}^{Q} C\mu^{K_l-2K_d}\exp\big\{-\varkappa_d^l(\tau-s)\mu^{-K_d}\big\}\times$$

$$\times\Big[C+\sum_{\lambda=d+1}^{m} C\mu^{K_d-K_\lambda}\exp\big\{-\varkappa_{0\lambda}^l s\mu^{-K_\lambda}\big\}\Big]_{(Q\geqslant 2)}+g_{iil}(\tau,s,\mu)\Big\}\,d\tau,$$

$$j=\overline{i+1,m}, \quad l=\overline{2,m};$$

$$\|P_{i+1jl}(t,s,\mu)\| \leqslant \|P_{ijl}(t,s,\mu)\| + \int\limits_s^t \|B_{iji}(t,r,\mu)\|\cdot\|P_{iil}(r,s,\mu)\|\,dr \leqslant$$

$$\leqslant g'(t-s) + C\mu^{-K_j}\exp\{-\kappa_j'(t-s)\mu^{-K_j}\}_{\langle l\geqslant j\rangle} +$$

$$+\sum_{q=2}^{i-1} C\mu^{-K_q}\exp\{-\kappa_q'(t-s)\mu^{-K_q}\}_{\langle l\geqslant i\geqslant 3\rangle} +$$

$$+\int\limits_s^t \Big\{\mu^{K_i}g'(t-r)\Big[C+\sum_{q=2}^{m} C\mu^{-K_q}\exp\{-\kappa_{0q}'r\mu^{-K_q}\}\Big] +$$

$$+\sum_{q=2}^{i-1} C\mu^{K_i-2K_q}\exp\{-\kappa_q'(t-r)\mu^{-K_q}\}\times$$

$$\times\Big[C+\sum_{d=q+1}^{m} C\mu^{K_q-K_d}\exp\{-\kappa_{0d}'r\mu^{-K_d}\}\Big]_{\langle i\geqslant 3\rangle} +$$

$$+C\mu^{-K_j}\exp\{-\kappa_j'(t-r)\mu^{-K_j}\}\Big\}\times$$

$$\times\Big\{g'(r-s)+\sum_{d=2}^{i} C\mu^{-K_d}\exp\{-\kappa_d'(r-s)\mu^{-K_d}\}_{\langle l\geqslant i\rangle}\Big\}\,dr,$$

$$j=\overline{i+1,m}, \quad l=\overline{1,m}.$$

Полученные интегралы вычисляются и оцениваются. Приведем для примера оценку следующего интеграла:

$$I=\int\limits_s^t \sum_{q=2}^{i-1} C\mu^{K_i-2K_q}\exp\{-\kappa_q(t-r)\mu^{-K_q}\}\times$$

$$\times\sum_{d=2}^{i} C\mu^{-K_d}\exp\{-\kappa_d(r-s)\mu^{-K_d}\}\,dr_{\langle i\geqslant 3\rangle} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{q=2}^{i-1}\sum_{d=2}^{i} C\mu^{K_i-2K_q-K_d}\left(\kappa_q'\mu^{-K_q}-\kappa_d\mu^{-K_d}\right)^{-1}\times$$

$$\times\Big\{\exp\{-\kappa_d(t-s)\mu^{-K_d}\}-\exp\{-\kappa_q'(t-s)\mu^{-K_q}\}\Big\}_{\langle i\geqslant 3\rangle}.$$

Здесь κ'_q — произвольное число из интервала $0 < \kappa'_q < \kappa_q$. Просуммируем отдельно слагаемые с индексами $q \leqslant d$ и $q > d$. При $q > d$ поменяем порядок суммирования. Получим

$$I \leqslant \sum_{q=2}^{i-1} C\mu^{K_i - 2K_q} \exp\left\{-\kappa'_q(t-s)\mu^{-K_q}\right\} \times$$

$$\times \sum_{d=q}^{i} \left(\kappa_d - \kappa'_q \mu^{K_d - K_q}\right)^{-1} \left[1 - \exp\left\{-\mu^{-K_d}(\kappa_d - \kappa'_q \mu^{K_d - K_q})(t-s)\right\}\right]_{(i\geqslant 3)} +$$

$$+ \sum_{d=2}^{i-2} C\mu^{K_i - K_d} \exp\left\{-\kappa_d(t-s)\mu^{-K_d}\right\} \sum_{q=d+1}^{i-1} \mu^{-K_q}\left(\kappa'_q - \kappa_d \mu^{K_q - K_d}\right)^{-1} \times$$

$$\times \left[1 - \exp\left\{-\mu^{-K_q}(\kappa'_q - \kappa_d \mu^{K_q - K_d})(t-s)\right\}\right]_{(i\geqslant 4)}.$$

Из формул видно: найдется такое значение μ'', $0 < \mu'' \leqslant \mu'$, что при $0 \leqslant s \leqslant t$, $0 < \mu \leqslant \mu''$ выражения в фигурных скобках не превышают единицы, $\kappa_d - \kappa'_q \mu^{K_d - K_q} \geqslant C > 0$ в первой сумме, $\kappa'_q - \kappa_d \mu^{K_q - K_d} \geqslant C > 0$ во второй сумме. Поэтому

$$I \leqslant \sum_{q=2}^{i-1} C\mu^{K_i - 2K_q} \exp\left\{-\kappa'_q(t-s)\mu^{-K_q}\right\}_{(i\geqslant 3)} +$$

$$+ \sum_{d=2}^{i-2} C\mu^{K_i - K_d - K_{i-1}} \exp\left\{-\kappa_d(t-s)\,\mu^{-K_d}\right\}_{(i\geqslant 4)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \quad 0 < \mu \leqslant \mu''.$$

Так как $K_i > K_q$, $K_i > K_{i-1}$, то окончательно получим

$$I \leqslant \sum_{q=2}^{i-1} C\mu^{-K_q} \exp\left\{-\kappa'_q(t-s)\,\mu^{-K_q}\right\}_{(i\geqslant 3)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \quad 0 < \mu \leqslant \mu''.$$

При оценке интегралов (39.7) используются следующие неравенства:

$$\text{III.} \quad \int_s^t \left[C(t-r)^{\kappa_1} + C\right] h(t,r,s)\,dr \leqslant \left[C(t-s)^{\kappa_1} + C\right] \int_s^t h(t,r,s)\,dr,$$

$$\int_s^t \left[C(r-s)^{\kappa_1} + C\right] h(t,r,s)\,dr \leqslant \left[C(t-s)^{\kappa_1} + C\right] \int_s^t h(t,r,s)\,dr,$$

$$(t-s)^{\kappa_1+1}\mu^{K_i} \leqslant T^{\kappa_1+1}\mu^{K_i - \chi(\kappa_1+1)} \leqslant T^{\kappa_1+1}\mu^{K_i - 1/2} \leqslant C.$$

$$h(t,r,s) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\mu^{-\chi}, \quad i = \overline{2,m};$$

IV. $(t-s)\,\mu^{K_i} \leqslant \mu^{K_i}(T-\chi\ln\mu) \leqslant C, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T-\chi\ln\mu, \quad i=\overline{2,m}.$

После вычисления интегралов в (39.7) и их оценки нетрудно получить неравенства (39.6), в которых i нужно заменить на $(i+1)$, а числа κ'_{0q}, κ'_q на меньшие положительные числа. Эти неравенства справедливы на множестве $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu'''$ при некотором значении μ''', $0 < \mu''' \leqslant \mu''$. Так как для $i=2$ утверждение 39.3 следует из утверждения 39.2, то отсюда по индукции получаем, что утверждение 39.3 справедливо для всех i, $i=\overline{2,m}$. □

Утверждение 39.4. *При* $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_{32}$ *функция* $a(t,\mu)$ *существует, единственна, непрерывна и удовлетворяет неравенству* (39.1).

Доказательство. Функция $a(t,\mu)$ вычисляется по формулам (28.7) через $P_{iil}(t,s,\mu)$, $L_{2l}(t,\mu)$ $\left(i=\overline{1,m},\ l=\overline{1,m}\right)$. Из (28.9), (38.1) следует, что

$$L_{2l}(t,\mu) = C_{20}, \quad l=\overline{1,m}, \quad t \geqslant 0, \quad \mu \geqslant 0. \tag{39.8}$$

Отсюда, из (28.7) и из утверждений 39.1, 39.3 следует, что функция $a(t,\mu)$ существует, единственна и непрерывна при $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_{32}$. Чтобы оценить $a(t,\mu)$, рассмотрим интеграл

$$I_i(t,\mu) \equiv \int_0^t \sum_{l=1}^m \|P_{iil}(t,s,\mu)\| \cdot L_{2l}(s,\mu)\,ds, \quad i=\overline{1,m}.$$

Из (39.2), (39.6), (39.8) получим неравенства

$$I_1(t,\mu) \leqslant \int_0^t \sum_{l=1}^m g_1(t-s)C_{20}\,ds \leqslant g_{31}(t),$$

$$I_i(t,\mu) \leqslant \int_0^t \left\{ \sum_{l=1}^m g'(t-s) + \sum_{l=i}^m \sum_{q=2}^i C\mu^{-K_q} \exp\left\{-\kappa'_q(t-s)\mu^{-K_q}\right\} \right\} \times$$
$$\times C_{20}\,ds \leqslant g_{31}(t), \quad i=\overline{2,m}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu), \quad 0 < \mu \leqslant \mu_{32}.$$

Здесь g_1, g_{31}, g' — функции (37.1), (39.1), (39.6). Отсюда и из (28.7) следует, что

$$a(t,\mu) = \max_{0 \leqslant s \leqslant t\ i=\overline{1,m}} I_i(s,\mu) \leqslant g_{31}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu), \quad 0 < \mu \leqslant \mu_{32}$$

(на каждом этапе оценивания постоянные коэффициенты в $g_{31}(t)$, вообще говоря, меняются). □

Утверждение 39.5. *Найдется такое значение* μ_{33}, $0 < \mu_{33} \leqslant \mu_{32}$, *что при* $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_{33}$ *функция* $b(t,\mu)$ *существует, единственна, непрерывна и удовлетворяет неравенству* (39.1).

Доказательство. Функция $b(t,\mu)$ вычисляется по формулам (28.7) через $P_{jq*}(t,\mu)$, $B_{iil}(t,s,\mu)$, $P_{iil}(t,s,\mu)$, $L_{1l}(t,\mu)$ $(j=\overline{1,m-1},\ q=\overline{j+1,m},\ i=\overline{1,m},\ l=\overline{1,m})$. Функции $P_{jq*}(t,\mu)$ существуют, единственны, непрерывны и вычисляются по формулам (39.3) при $t\in D_t$, $0<\mu\leqslant\bar{\mu}$. Из (28.9), (38.1) следуют формулы

$$L_{1i}(t,\mu)=g_{22}(t,\mu),\quad i=\overline{1,m},\quad t\geqslant 0,\quad \mu\geqslant 0, \tag{39.9}$$

где g_{22} — функция (38.1). Отсюда, из (28.7) и из утверждений 39.1, 39.3 следует, что функция $b(t,\mu)$ существует, единственна и непрерывна при $0\leqslant t\leqslant t_*(\mu)$, $0<\mu\leqslant\mu_{32}$. Чтобы оценить $b(t,\mu)$, рассмотрим интегралы

$$I_{1i}(t,\mu)\equiv\int\limits_0^t\sum_{l=1}^m\|B_{iil}(t,s,\mu)\|\,ds,$$

$$I_{2i}(t,\mu)\equiv\int\limits_0^t\sum_{l=1}^m\|P_{iil}(t,s,\mu)\|\cdot L_{1l}(s,\mu)\,ds,\quad i=\overline{1,m}.$$

Из (39.2), (39.6), (39.9) получим следующие неравенства на множестве $0\leqslant t\leqslant t_*(\mu)$, $0<\mu\leqslant\mu_{32}$:

$$I_{11}(t,\mu)\leqslant\int\limits_0^t\sum_{l=2}^m\mu^{K_l}\,g_1(t-s)\Big[C+\sum_{q=2}^m C\mu^{-K_q}\exp\{-\kappa_{0q}s\mu^{-K_q}\}\Big]\,ds,$$

$$I_{1i}(t,\mu)\leqslant\int\limits_0^t\Big\{\sum_{l=2}^m\mu^{K_l}\,g'(t-s)\Big[C+\sum_{q=2}^m C\mu^{-K_q}\exp\{-\kappa'_{0q}s\mu^{-K_q}\}\Big]+$$

$$+\sum_{l=3}^{i-1}\sum_{q=2}^{l-1}C\mu^{K_l-2K_q}\exp\big\{-\kappa'_q(t-s)\,\mu^{-K_q}\big\}\times$$

$$\times\Big[C+\sum_{d=q+1}^m C\mu^{K_q-K_d}\exp\{-\kappa'_{0d}s\mu^{-K_d}\}\Big]_{(i\geqslant 4)}+$$

$$+\sum_{l=i}^m\sum_{q=2}^{i-1}C\mu^{K_l-2K_q}\exp\big\{-\kappa'_q(t-s)\mu^{-K_q}\big\}\times$$

$$\times\Big[C+\sum_{d=q+1}^m C\mu^{K_q-K_d}\exp\{-\kappa'_{0d}s\mu^{-K_d}\}\Big]_{(i\geqslant 3)}+$$

$$+\sum_{l=2}^{i} C\mu^{-K_{l-1}} \exp\left\{-\kappa_l'(t-s)\,\mu^{-K_l}\right\}+$$

$$+\sum_{l=i+1}^{m} \mu^{K_l-2K_i} \exp\left\{-\kappa_i'(t-s)\,\mu^{-K_i}\right\}\times$$

$$\times\left[C+\sum_{q=i+1}^{m} C\mu^{K_i-K_q}\exp\left\{-\kappa_{0q}'s\mu^{-K_q}\right\}\right]_{(i<m)}\Bigg\}\,ds,$$

$$I_{21}(t,\mu)\leqslant\int_0^t\sum_{l=1}^{m} g_1(t-s)\cdot g_{22}(s,\mu)\,ds,$$

$$I_{2i}(t,\mu)\leqslant\int_0^t\left\{\sum_{l=1}^{m} g'(t-s)+\sum_{l=i}^{m}\sum_{q=2}^{i}C\mu^{-K_q}\exp\left\{-\kappa_q'(t-s)\mu^{-K_q}\right\}\right\}\times$$

$$\times g_{22}(s,\mu)\,ds,\quad i=\overline{2,m}.$$

Здесь g_1, g_{22}, g' — функции (37.1), (38.1), (39.6). Вычислив интегралы, нетрудно показать (так же, как в доказательстве утверждения 39.3): найдется такое значение μ_{33}, $0<\mu_{33}\leqslant\mu_{32}$, что при $0\leqslant t\leqslant t_*(\mu)$, $0<\mu\leqslant\mu_{33}$ справедливы оценки

$$I_{11}(t,\mu)\leqslant\mu^{K_2}\,g_{31}(t);$$

$$I_{1i}(t,\mu)\leqslant\mu^{K_2}\,g_{31}(t)+\sum_{l=2}^{i} C\mu^{K_l-K_{l-1}}+C\mu^{K_{i+1}-K_i}{}_{(i<m)},\quad i=\overline{2,m};$$

$$I_{2i}(t,\mu)\leqslant g_{32}(\mu),\quad i=\overline{1,m}.$$

Здесь g_{31}, g_{32} — функции (39.1). Отсюда и из (28.7), (39.4) получим:

$$b(t,\mu)=\max_{0\leqslant s\leqslant t\ i=\overline{1,m}}\left[\sum_{l=i+1}^{m}\|P_{il*}(s,\mu)\|\mu^{K_l-K_i}{}_{(i<m)}+I_{1i}(s,\mu)+I_{2i}(s,\mu)\right]\leqslant$$

$$\leqslant\max_{i=\overline{2,m}}\Bigg[C\mu^{K_2}+\mu^{K_2}\,g_{31}(t)+g_{32}(\mu),$$

$$C\mu^{K_{i+1}-K_i}{}_{(i<m)}+\mu^{K_2}\,g_{31}(t)+\sum_{l=2}^{i}C\mu^{K_l-K_{l-1}}+g_{32}(\mu)\Bigg]\leqslant g_{32}(\mu),$$

$$0\leqslant t\leqslant t_*(\mu),\quad 0<\mu\leqslant\mu_{33}$$

(здесь на каждом этапе постоянные коэффициенты в $g_{31}(\mu)$, $g_{32}(\mu)$, вообще говоря, меняются). □

Утверждение 39.6. *Найдется такое значение μ_3, $0 < \mu_3 \leqslant \mu_{33}$, что при $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_3$ функция $c(t,\mu)$ существует, единственна, непрерывна и удовлетворяет неравенству* (39.1).

Доказательство. Из формулы (28.7) для $c(t,\mu)$, леммы 38.1 и утверждений 39.1, 39.3 следует, что при $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_{32}$ функция $c(t,\mu)$ существует, единственна и непрерывна. Для оценки $c(t,\mu)$ рассмотрим интеграл

$$I_i(t,\mu) \equiv \int\limits_0^t \sum_{l=1}^m \|P_{il}(t,s,\mu)\cdot G_l(0,s,\mu)\|\,ds, \quad i=\overline{1,m}.$$

Из (38.1), (39.2), (39.6) следуют неравенства

$$I_1(t,\mu) \leqslant \int\limits_0^t \sum_{l=1}^m g_1(t-s)\Big[g_{21}(s)\,\mu^{n+1} + \sum_{j=l+1}^m \widetilde{C}_{2lj}\mu^{n+1-K_l-K_j}\exp\{-\kappa'_{0j}s\mu^{-K_j}\}_{(l<m)}\Big]\,ds,$$

$$I_i(t,\mu) \leqslant \int\limits_0^t \sum_{l=1}^m \Big\{g'(t-s) + \sum_{q=2}^i C\mu^{-K_q}\exp\big[-\kappa'_q(t-s)\mu^{-K_q}\big]_{(l\geqslant i)}\Big\} \times \Big[g_{21}(s)\mu^{n+1} + \sum_{j=l+1}^m \widetilde{C}_{2lj}\mu^{n+1+K_l-K_j}\exp\{-\kappa'_{0j}s\mu^{-K_j}\}_{(l<m)}\Big]\,ds,$$

$$i=\overline{2,m}, \quad 0\leqslant t\leqslant t_*(\mu), \quad 0<\mu\leqslant\mu_{32}.$$

Здесь g_1, g_{21}, g' — функции (37.1), (38.1), (39.6). Вычислив интегралы, можно показать: найдется значение μ_3, $0 < \mu \leqslant \mu_{33}$, при котором справедливы неравенства

$$I_i(t,\mu) \leqslant g_{33}(t)\,\mu^{n+1}, \quad i=\overline{1,m}, \quad 0\leqslant t\leqslant t_*(\mu), \quad 0<\mu\leqslant\mu_3,$$

где g_{33} — функция (39.1). Отсюда и из (28.7) получим

$$c(t,\mu) = \max_{0\leqslant s\leqslant t\ i=\overline{1,m}} I_i(s,\mu) \leqslant g_{33}(t)\,\mu^{n+1},$$

$$0\leqslant t\leqslant t_*(\mu), \quad 0<\mu\leqslant\mu_3.$$ □

Лемма 39.1 следует из утверждений 39.4–39.6.

§ 40. Применение теоремы 28.5

Пусть выполняются условия теорем 28.1–28.4. Рассмотрим условия 28.1–28.3 для задачи (36.2). Положим значения δ, $\widetilde{\mu}$ из теоремы 28.5 равными $\delta=\delta_2$, $\widetilde{\mu}=\mu_3$, где δ_2, μ_3 — числа из лемм 38.1, 39.1.

Из (36.2), условий 26.2, 26.7, леммы 33.1 и равенства $y_1^{(0)}(t) = 0$ следует, что условие 28.1 для задачи (36.2) выполняется.

Выполнение условия 28.2 следует из леммы 38.1. При этом из (28.9), (38.1) следуют равенства $L_{1i}(t,\mu) = g_{22}(t,\mu)$, $L_{2i}(t,\mu) = C_{20}$, $i = \overline{1,m}$.

Проверим условие 28.3. Из (36.2) и условий 26.4, 26.7 получим:

$$\det\begin{pmatrix} B_{i+1\ i+1} & \dots & B_{i+1\ m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m\ i+1} & \dots & B_{mm} \end{pmatrix}(t,\mu) = \left|\frac{\partial(F_{i+1}\dots F_m)}{\partial(x_{i+1}\dots x_m)}\Big(X_0(t,\mu),t,0\Big)\right| \neq 0,$$

$$t \in D_t, \quad 0 < \mu \leqslant \mu_3, \quad i = \overline{1, m-1}.$$

Отсюда следует, что задача (36.2) удовлетворяет условиям теоремы 28.5. По этой теореме для всех значений t, μ из множества (28.11) решение задачи (36.2) существует, единственно и удовлетворяет неравенству (28.12).

Из леммы 39.1 следует, что при $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_3$ множество (28.11) содержит подмножество

$$\begin{gathered} p_1(\mu) \equiv 1 - g_{32}(\mu) > 0, \quad q_1(t,\mu) \equiv p_1^2(\mu) - 4g_{31}(t)\cdot g_{33}(t)\mu^{n+1} > 0, \\ 2g_{33}(t)\ \mu^{n+1} < \delta_2\Big[p_1(\mu) + \sqrt{q_1(t,\mu)}\Big], \quad 0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu), \quad 0 < \mu \leqslant \mu_3. \end{gathered} \tag{40.1}$$

При $0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$ из (39.1) следуют соотношения

$$\begin{aligned} &\text{I, II.} && g_{31}(t)\cdot g_{33}(t)\mu^{n+1} = C\mu^{n+1}, \\ &\text{III.} && g_{31}(t)\cdot g_{33}(t)\ \mu^{n+1} \leqslant \big[Ct^{2(n+1)(\kappa_1+1)} + C\big]\mu^{n+1} \leqslant \\ &&& \leqslant C\mu^{(n+1)[1-2(\kappa_1+1)\chi]}, \\ &\text{IV.} && g_{31}(t)\cdot g_{33}(t)\ \mu^{n+1} \leqslant \ \leqslant C\mu^{n+1}\exp\big\{(n+2)\kappa_1 t\big\} \\ &&& \leqslant C\mu^{n+1-(n+2)\chi\kappa_1}. \end{aligned} \tag{40.2}$$

По условию теоремы 28.3 $\chi < [2(\kappa_1+1)]^{-1}$, по условию теоремы 28.4 $\chi < (n+1)[(n+2)\kappa_1]^{-1}$. Отсюда, из (39.1), (40.2) следует: найдется такое значение μ_*, $0 < \mu_* \leqslant \mu_3$, что первые три неравенства (40.1) выполняются при

$$0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu), \quad 0 < \mu \leqslant \mu_*, \tag{40.3}$$

то есть множество (40.3) принадлежит (40.1), а значит и (28.11).

На множестве (40.3) $p_1(\mu) + \sqrt{q_1(t,\mu)} \geqslant C > 0$. Поэтому из (28.12), (39.1), (40.1) следуют неравенства

$$\|u(t,\mu)\| \leqslant \frac{2g_{33}(t)\ \mu^{n+1}}{p_1(\mu) + \sqrt{q_1(t,\mu)}} \leqslant g_{33}(t)\ \mu^{n+1}, \tag{40.4}$$

где коэффициенты в $g_{33}(t)$, вообще говоря, отличаются от коэффициентов в (39.1).

Таким образом, получили: при выполнении условий теорем 28.1–28.4 на множестве (40.3) решение задачи (36.2) существует, единственно и удовлетворяет неравенству (40.4). Отсюда и из (36.1), (36.4), (39.1) следуют утверждения теорем 28.1–28.4. □

§ 41. Выводы главы 4

В главе 4 дано доказательство теорем 28.1–28.4 о методе пограничных функций.

В § 33–§ 35 рассмотрены функции $y_j^{(k)}(\tau_j)$ $\left(k = \overline{0, n},\ j = \overline{1, m}\right)$, входящие в асимптотическое решение (23.2) задачи (22.1). В § 36 сделан переход от исходной задачи (22.1) к задаче (36.2) для новой переменной u, введенной по формуле (36.1). Доказательство теорем 28.1–28.4 сведено к проверке условий теоремы 28.5 для задачи (36.2). В § 37–§ 39 рассмотрены функции V_i, G_i, a, b, c, необходимые для применения теоремы 28.5 к задаче (36.2). В § 40 к задаче (36.2) применена теорема 28.5, и тем самым завершено доказательство теорем 28.1–28.4.

Глава 5

Метод двух параметров

§ 42. Построение асимптотического решения методом двух параметров

Рассмотрим сингулярно возмущенную задачу (22.1). Вместе с ней рассмотрим задачу, содержащую два малых параметра μ и ε:

$$\begin{aligned} &\frac{dz_1}{dt} = F_1(z, t, \varepsilon), \quad z_1|_{t=0} = x_1^\circ(\varepsilon), \\ &\mu^{K_i}\frac{dz_i}{dt} = F_i(z, t, \varepsilon), \quad z_i|_{t=0} = x_i^\circ(\varepsilon), \quad i = \overline{2, m}. \end{aligned} \tag{42.1}$$

Здесь z_i — N_i-мерный вектор, $z = (z_1, \ldots, z_m)$.

Опишем *метод двух параметров*. Пусть хотя бы одна из функций F_i, x_i° зависит явно от малого параметра. Тогда при каждом фиксированном значении μ (42.1) является регулярно возмущенной задачей Коши с малым параметром ε и ее решение можно построить методом малого параметра Пуанкаре (смотрите § 9) в виде ряда

$$z(t, \mu, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t, \mu)\varepsilon^k. \tag{42.2}$$

Тогда решение задачи (22.1) примет соответственно вид

$$\boxed{x(t, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t, \mu)\mu^k.} \tag{42.3}$$

Опишем алгоритм построения ряда (42.2), предполагая, что все операции имеют смысл:

- ряды (42.2) подставляем в уравнения (42.1);
- разлагаем левые и правые части уравнений в ряды по степеням параметра ε;
- приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

После указанных операций получаем уравнения для $z^{(k)}(t, \mu)$. При $k = 0$ уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} &\mu^{K_i}\frac{dz_i^{(0)}}{dt} = F_i\big(z^{(0)}, t, 0\big), \quad z_i^{(0)}(0, \mu) = x_i^\circ(0), \\ &i = \overline{1, m}, \quad z^{(0)} = \big(z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)}\big), \quad K_1 = 0. \end{aligned} \tag{42.4}$$

При $k \geqslant 1$ уравнения следующие:

$$\mu^{K_i} \frac{dz_i^{(k)}}{dt} = F_{ix}\big(z^{(0)}(t,\mu),t,0\big)z^{(k)} + \left[F_i\left(\sum_{j=0}^{k-1} z^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j, t, \varepsilon\right)\right]^{(k)}, \tag{42.5}$$
$$z_i^{(k)}(0,\mu) = [x_i^\circ(\varepsilon)]^{(k)}, \quad i=\overline{1,m}, \quad z^{(k)} = (z_1^{(k)},\ldots,z_m^{(k)}).$$

В главе 5 скобки с верхним индексом $^{(k)}$ обозначают коэффициент при ε^k в разложении функции, стоящей в скобках, в ряд по степеням ε. Из уравнений видно, что $z^{(k)}(t,\mu)$ вычисляются последовательно для $k = 0, 1, \ldots$. При $k \geqslant 1$ $z^{(k)}(t,\mu)$ является решением линейной задачи Коши (42.5).

Отметим, что если правые части дифференциальных уравнений и начальные значения задачи (22.1) не зависят от малого параметра, то говорить о применимости метода двух параметров не приходится, так как ряд (42.3) состоит из одного (первого) члена, совпадающего с точным решением задачи (22.1).

§ 43. Формулировки теорем о методе двух параметров

43.1. Точное решение

Обозначим через $\mathbf{C}(D_x)$ окрестность точки $x = 0$ в N-мерном векторном пространстве $\mathbf{C}^N$ комплексных чисел, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^1$. Пересечение $\mathbf{C}(D_x)$ с вещественной плоскостью $\operatorname{Im} x = 0$ совпадает с D_x. Обозначим через $U_1(t,s)$ матрицу Коши уравнения (26.9) при $i = 1$.

Сформулируем теоремы о сходимости ряда (42.3) к решению задачи (22.1). Для этого наложим на задачу (22.1) дополнительные условия.

Условие 43.1. *Функции $F_i(x,t,\mu)$ непрерывны по совокупности аргументов, аналитичны по x, μ и ограничены по норме при $x \in \mathbf{C}(D_x) \subset \mathbf{C}^N$, $t \in D_t$, $|\mu| \leqslant \bar\mu$, $\mu \in \mathbf{C}$, $i = \overline{1,m}$.*

Условие 43.2. *Функции $x_i^\circ(\mu)$ аналитичны при $|\mu| \leqslant \bar\mu$, $\mu \in \mathbf{C}$, $i = \overline{1,m}$.*

Теорема 43.1. *Пусть существуют такие положительные постоянные $\bar\mu$, κ_2, ..., κ_m, C_2, ..., C_m, T, что при $D_t = \{t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $n = 0$ выполняются условия* 26.1–26.8, 43.1, 43.2. *Тогда найдется постоянная $\mu_* > 0$, не зависящая от t, μ и такая, что на множестве $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$:* 1) *решение задачи* (22.1) *существует и единственно;* 2) *ряд* (42.3) *сходится равномерно к решению задачи* (22.1).

Теорема 43.2. *Пусть существуют такие положительные постоянные $\bar\mu$, κ_1, ..., κ_m, C_1, ..., C_m, что при $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$, $n = 0$ выполняются условия* 26.1–26.8, 43.1, 43.2 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t,s)\| \leqslant C_1 \exp\{-\kappa_1(t-s)\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{43.1}$$

Тогда найдется постоянная $\mu_* > 0$, *не зависящая от* t, μ *и такая, что на множестве* $t \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$: 1) *решение задачи* (22.1) *существует и единственно*; 2) *ряд* (42.3) *сходится равномерно к решению задачи* (22.1).

Теорема 43.3. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\overline{\mu}$, κ_2, ..., κ_m, C_1, ..., C_m *и постоянные* $\kappa_1 \geqslant 0$, $C_1^\circ \geqslant 0$, *что при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$, $n = 0$ *выполняются условия* 26.1–26.8, 43.1, 43.2 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t, s)\| \leqslant C_1^\circ (t - s)^{\kappa_1} + C_1, \quad 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{43.2}$$

Тогда для любых значений $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < [2(\kappa_1 + 1)]^{-1}$, *найдется постоянная* $\mu_* > 0$, *не зависящая от* t, μ *и такая, что на множестве* $0 \leqslant t \leqslant T\mu^{-\chi}$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$: 1) *решение задачи* (22.1) *существует и единственно*; 2) *ряд* (42.3) *сходится равномерно к решению задачи* (22.1).

Теорема 43.4. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\overline{\mu}$, κ_1, ..., κ_m, C_1, ..., C_m, *что при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$, $n = 0$ *выполняются условия* 26.1–26.8, 43.1, 43.2 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t, s)\| \leqslant C_1 \exp\{\kappa_1(t - s)\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{43.3}$$

Тогда для любых значений $T \geqslant 0$, χ, $0 \leqslant \chi < (2\kappa_1)^{-1}$, *найдется постоянная* $\mu_* > 0$, *не зависящая от* t, μ *и такая, что на множестве* $0 \leqslant t \leqslant T - \chi \ln \mu$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$: 1) *решение задачи* (22.1) *существует и единственно*; 2) *ряд* (42.3) *сходится равномерно к решению задачи* (22.1).

При выполнении условий теорем 43.1–43.4 для указанных в теоремах значений t, μ ряд (42.3) сходится к решению задачи (22.1):

$$\boxed{x(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t, \mu)\mu^k.}$$

43.2. Асимптотическое решение

Обозначим частичную сумму ряда (42.3)

$$Z_n(t, \mu) = \sum_{k=0}^{n} z^{(k)}(t, \mu)\mu^k. \tag{43.4}$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 43.5. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\overline{\mu}$, κ_2, ..., κ_m, C_2, ..., C_m, T, *что при* $D_t = \{t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$ *выполняются условия* 26.1–26.8. *Тогда найдутся* $\mu_* > 0$, C_*, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (22.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t, \mu) - Z_n(t, \mu)\| \leqslant C_* \mu^{n+1} \tag{43.5}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Теорема 43.6. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_1, ..., κ_m, C_1, ..., C_m, *что при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 26.1–26.8 *и справедливо неравенство* (43.1). *Тогда найдутся* $\mu_* > 0$, C_*, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (22.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t,\mu) - Z_n(t,\mu)\| \leqslant C_*\mu^{n+1}$$

при $t \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Теорема 43.7. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_2, ..., κ_m, C_1, ..., C_m *и постоянные* $\kappa_1 \geqslant 0$, $C_1^\circ \geqslant 0$, *что при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 26.1–26.8 *и справедливо неравенство* (43.2). *Тогда для любых значений* $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < [2(\kappa_1 + 1)]^{-1}$, *найдутся* $\mu_* > 0$, C_*, $C_*^\circ \geqslant 0$, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (22.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t,\mu) - Z_n(t,\mu)\| \leqslant \mu^{n+1}\left[C_*^\circ t^{(\kappa_1+1)(2n+1)} + C_*\right]$$

при $0 \leqslant t \leqslant T\mu^{-\chi}$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Теорема 43.8. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_1, ..., κ_m, C_1, ..., C_m, *что при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 26.1–26.8 *и справедливо неравенство* (43.3). *Тогда для любых значений* $T \geqslant 0$, χ, $0 \leqslant \chi < (n+1)[(n+2)\kappa_1]^{-1}$, *найдутся* $\mu_* > 0$, C_*, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (22.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t,\mu) - Z_n(t,\mu)\| \leqslant C_*\mu^{n+1}\exp\{(n+1)\kappa_1 t\}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T - \chi\ln\mu$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Из доказательства теорем 43.1–43.4 (смотрите соотношения (44.34)) и из теорем 43.5–43.8 следует, что функция $Z_n(t,\mu)$, задаваемая формулой (43.4), является асимптотическим решением задачи (22.1) на отрезке (теоремы 43.1, 43.5), на полуоси (теоремы 43.2, 43.6), на асимптотически больших интервалах времени (теоремы 43.3, 43.4, 43.7, 43.8). Справедливы равенства

$$x(t,\mu)=Z_n(t,\mu)+o(\mu^n), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \quad \mu\to 0 \quad \text{(теоремы 43.1, 43.5)};$$

$$x(t,\mu)=Z_n(t,\mu)+o(\mu^n), \quad t\geqslant 0, \quad \mu\to 0 \quad \text{(теоремы 43.2, 43.6)};$$

$$x(t,\mu)=Z_n(t,\mu)+o(\mu^{n\chi_*}), \quad 0\leqslant t\leqslant T\mu^{-\chi}, \quad \mu\to 0 \quad \text{(теоремы 43.3, 43.7)},$$

где T, χ — произвольные числа из множества $T > 0$, $0 \leqslant \chi < [2(\kappa_1+1)]^{-1}$, $\chi_* = 1 - 2\chi(\kappa_1 + 1)$;

$$x(t,\mu)=Z_n(t,\mu)+o(\mu^{n\chi_*}), \quad 0\leqslant t\leqslant T-\chi\ln\mu, \quad \mu\to 0, \quad \text{(теорема 43.4, 43.8)},$$

где T, χ — произвольные числа из множества $T \geqslant 0$, $0 \leqslant \chi < (2\kappa_1)^{-1}$, $\chi_* = 1 - 2\kappa_1\chi$, $\chi_* = 1 - \kappa_1\chi$.

43.3. Точное решение при фиксированном значении μ

При выполнении условий теоремы 43.1 ряд (42.3), построенный методом двух параметров, сходится к решению задачи (22.1) на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ при достаточно малых значениях $\mu > 0$. Однако во многих случаях малый параметр μ имеет фиксированное значение. Поэтому представляет интерес теорема 43.9, гарантирующая сходимость ряда (42.3) к решению задачи (22.1) при заданном значении μ на интервале времени, который, вообще говоря, меньше отрезка $[0, T]$.

Теорема 43.9. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}, \kappa_2, \ldots, \kappa_m$, $C_2, \ldots, C_m, T$, *что при* $D_t = \{t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $n = 0$ *выполняются условия* 26.1–26.8, 43.1, 43.2. *Пусть* δ, μ_* — *такие значения, что* $\delta > 0$, $0 < \mu_* \leqslant \bar{\mu}$ *и на множестве*

$$\|u\| \leqslant \delta, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad 0 < \mu \leqslant \mu_*, \quad |\varepsilon| \leqslant \mu_*, \quad u \in \mathbf{C}^N, \quad \varepsilon \in \mathbf{C} \tag{43.6}$$

функции $F_i'(u, t, \mu, \varepsilon)$,

$$F_i'(u,t,\mu,\varepsilon) \equiv F_i\big(u+z^{(0)}(t,\mu)+x^\circ(\varepsilon)-x^\circ(0),t,\varepsilon\big)-F_i\big(z^{(0)}(t,\mu),t,0\big), \quad i=\overline{1,m}, \tag{43.7}$$

аналитичны по u, ε. *Тогда для любого* μ, $0 < \mu < \mu_*$, *найдется такое значение* $t_* = t_*(\mu)$, *что* $0 < t_* \leqslant T$ *и на множестве* $0 \leqslant t < t_*$: 1) *решение задачи* (22.1) *существует и единственно*; 2) *ряд* (42.3) *сходится к решению задачи* (22.1). *Сходимость равномерная на* $[0, t']$ *при любом* $t' < t_*$.

43.4. Замечания

Замечание 43.1. Из доказательства теорем 43.5–43.8 в § 45 следует, что теоремы 43.5–43.8 справедливы и в случае, когда в условии 26.2 требуется существование производных до порядка $n_* \equiv \max(2, n+1)$ включительно.

Замечание 43.2. При $m = 1$, $\mu = \varepsilon$ задача (22.1) переходит в регулярно возмущенную задачу Коши, теоремы 43.1–43.9 становятся аналогичными теоремам 9.1–9.9 соответственно.

Замечание 43.3. Численные оценки остаточного члена асимптотического разложения решения задачи (22.1), интервала времени, на котором существует решение задачи, значений малого параметра можно получить с помощью теорем 28.5, 28.6.

Замечание 43.4. Сходимость рядов к точному решению сингулярно возмущенной задачи рассматривалась в [32].

§ 44. Доказательство теорем 43.1–43.4

44.1. Существование и единственность решения

Первое утверждение теоремы 43.J ($1 \leqslant J \leqslant 4$) следует из теоремы 28.$J$. Сформулируем его следующим образом: найдется постоянная μ_*',

не зависящая от t, μ и такая, что $0 < \mu'_* \leqslant \bar{\mu}$ и решение задачи (22.1) существует и единственно при $(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu'_*)$. Здесь

$$D_{t\mu}(\mu'_*) \equiv \{(t, \mu)\colon\ 0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu), 0 < \mu \leqslant \mu'_*\}, \tag{44.1}$$

$$t_*(\mu) = \begin{cases} T & \text{для теоремы 43.1,} \\ \infty & \text{для теоремы 43.2,} \\ T\mu^{-\chi} & \text{для теоремы 43.3,} \\ T - \chi \ln \mu & \text{для теоремы 43.4,} \end{cases}$$

T, χ — числа, указанные в теоремах.

44.2. Функция $z^{(0)}$

Утверждение 44.1. *Найдутся такие значения μ_1, C, C°, что $0 < \mu_1 \leqslant \mu'_*$, $C^\circ \geqslant 0$ и при $(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu_1)$ функция $z^{(0)}(t, \mu)$ существует, единственна, удовлетворяет неравенству*

$$\left\| z^{(0)}(t, \mu) - X_0(t, \mu) \right\| \leqslant g_1(t)\mu, \tag{44.2}$$

значения $z^{(0)}(t, \mu)$ принадлежат замкнутому подмножеству $\overline{D}_{x1} \subset D_x$. Здесь

$$g_1(t) \equiv \begin{cases} C & \text{для теорем 43.1, 43.2,} \\ C^\circ t^{\kappa_1 + 1} + C & \text{для теоремы 43.3,} \\ C \exp\{\kappa_1 t\} & \text{для теоремы 43.4,} \end{cases} \tag{44.3}$$

$X_0(t, \mu)$ — нулевое приближение решения задачи (22.1), построенное методом пограничных функций в § 23:

$$X_0(t, \mu) = \sum_{j=1}^{m} y_j^{(0)}(\tau_j), \quad \tau_j = t\mu^{-K_j} \quad (\tau_1 = t, K_1 = 0).$$

Доказательство. Если выполняются условия теоремы 43.J $(1 \leqslant J \leqslant 4)$, то для задачи (42.4) справедливы утверждения теоремы 28.J, из которых следует существование, единственность функции $z^{(0)}(t, \mu)$ и выполнение неравенства (44.2), так как для задачи (42.4) $z^{(0)}(t, \mu)$ — точное решение, а $X_0(t, \mu)$ — нулевое приближение решения, построенное методом пограничных функций. Возможность такого выбора μ_1, при котором $z^{(0)}(t, \mu) \in \overline{D}_{x1}$, следует из условия 26.7, леммы 33.1, неравенства (44.2) и формул (44.1), (44.3) для $t_*(\mu)$, $g_1(t)$.

44.3. Введение вспомогательной переменной

Обозначим

$$u = z - z^{(0)}(t, \mu) - x^\circ(\varepsilon) + x^\circ(0). \tag{44.4}$$

Из (42.1), (42.4) следует, что u — решение следующей задачи Коши:

$$\mu^{K_i} \frac{du_i}{dt} = B_i(t, \mu)u + G_i(u, t, \mu, \varepsilon), \quad u_i|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{44.5}$$

$$u = (u_1, \ldots, u_m), \quad B_i(t, \mu) \equiv F_{ix}(X_0(t, \mu), t, 0),$$

$$G_i(u, t, \mu, \varepsilon) \equiv F_i\big(u + z^{(0)}(t, \mu) + x^\circ(\varepsilon) - x^\circ(0), t, \varepsilon\big) -$$
$$- F_i\big(z^{(0)}(t, \mu), t, 0\big) - F_{ix}\big(X_0(t, \mu), t, 0\big)u.$$

Рассмотрим разложение решения задачи (44.5) в ряд по степеням параметра ε:

$$u(t, \mu, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)}(t, \mu)\varepsilon^k, \quad u^{(0)}(t, \mu) = 0. \tag{44.6}$$

По теореме Пуанкаре 9.1 для любого значения μ, $0 < \mu \leqslant \mu_1$, найдется такое значение $\mu_* = \mu_*(\mu) > 0$, что решение задачи (44.5) существует, единственно и представимо в виде ряда (44.6) на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t'_*(\mu)$ при $|\varepsilon| \leqslant \mu_*(\mu)$ (в теореме 43.2 $t'_*(\mu)$ — произвольное число, в остальных теоремах $t'_*(\mu)$ совпадает с $t_*(\mu)$). Однако отсюда не следует сходимость ряда (44.6) при $\varepsilon = \mu$, так как в достаточно малой окрестности точки $\mu = 0$ множество $|\mu| \leqslant \mu_*(\mu)$ может оказаться пустым.

Построим мажоранту ряда (44.6). Для этого перейдем от задачи (44.5) к интегральным уравнениям так же, как в главе 3 сделан переход от (28.6) к (29.10). Получим уравнения, эквивалентные (44.5):

$$u_i(t,\mu,\varepsilon) = -\sum_{l=i+1}^{m} \mu^{K_l - K_i} P_{il*}(t,\mu)\cdot u_l(t,\mu,\varepsilon)_{(i<m)} +$$
$$+ \int_0^t \sum_{l=1}^{m} \big[B_{iil}(t,s,\mu)\cdot u_l(s,\mu,\varepsilon) + P_{iil}(t,s,\mu)\cdot G_l\big(u(s,\mu,\varepsilon),s,\mu,\varepsilon\big)\big]\,ds, \tag{44.7}$$
$$i = \overline{1, m}.$$

Здесь функции P_{il*}, B_{iil}, P_{iil} совпадают с функциями (28.7).

44.4. Функции P_{il*}, B_{iil}, P_{iil}

Утверждение 44.2. *Найдутся такие постоянные μ_2, C, что $0 < \mu_2 \leqslant \mu_1$ и при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_2$ функции $P_{il*}(t, \mu)$, $i = \overline{1, m-1}$, $l = \overline{i+1, m}$; $B_{iil}(t, s, \mu)$, $P_{iil}(t, s, \mu)$, $i = \overline{1, m}$, $l = \overline{1, m}$, существуют, единственны, непрерывны и удовлетворяют соотношениям*

$$\|P_{il*}(t, \mu)\| \leqslant C, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad l = \overline{i+1, m};$$
$$B_{ii1}(t, s, \mu) = 0, \quad i = \overline{1, m};$$
$$\|B_{11l}(t, s, \mu)\| \leqslant \mu^{K_l} g'(t-s)\left[C + \sum_{q=2}^{m} C\mu^{-K_q} \exp\left\{-\kappa'_{0q} s \mu^{-K_q}\right\}\right], \tag{44.8}$$
$$l = \overline{2, m};$$

$$\|B_{iil}(t,s,\mu)\| \leqslant \mu^{K_l} g'(t-s)\left[C+\sum_{q=2}^{m} C\mu^{-K_q}\exp\left\{-\kappa'_{0q}s\mu^{-K_q}\right\}\right]+$$

$$+\sum_{q=2}^{Q} C\mu^{K_l-2K_q}\exp\left\{-\kappa'_q(t-s)\mu^{-K_q}\right\}\left[C+\sum_{d=q+1}^{m} C\mu^{K_q-K_d}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{-\kappa'_{0d}s\mu^{-K_d}\right\}\right]_{(Q\geqslant 2)}+g_{iil}(t,s,\mu),\quad i=\overline{2,m},\quad l=\overline{2,m};$$

$$\|P_{1l}(t,s,\mu)\| \leqslant g'(t-s),\quad l=\overline{1,m};$$

$$\|P_{il}(t,s,\mu)\| \leqslant g'(t-s)+\sum_{q=2}^{i} C\mu^{-K_q}\exp\left\{-\kappa'_q(t-s)\mu^{-K_q}\right\}_{(l\geqslant i)},$$

$$i=\overline{2,m},\quad l=\overline{1,m};$$

$$Q\equiv\min\{i,l\}-1,\quad g'(t)\equiv\begin{cases} C & \text{для теоремы 43.1},\\ C\exp\{-\kappa'_1 t\} & \text{для теоремы 43.2},\\ Ct^{\kappa_1}+C & \text{для теоремы 43.3},\\ C\exp\{\kappa_1 t\} & \text{для теоремы 43.4},\end{cases}$$

$$g_{iil}(t,s,\mu)\equiv\begin{cases} C\mu^{-K_{l-1}}\exp\left\{-\kappa'_l(t-s)\mu^{-K_l}\right\}, & l\leqslant i,\\ \mu^{K_l-2K_i}\exp\left\{-\kappa'_i(t-s)\mu^{-K_i}\right\}\times & \\ \quad\times\left[C+\displaystyle\sum_{q=i+1}^{m} C\mu^{K_i-K_q}\exp\left\{-\kappa'_{0q}s\mu^{-K_q}\right\}\right], & l>i;\end{cases}$$

κ'_{0q}, κ'_q — произвольные положительные числа из интервалов $0<\kappa'_{0q}<\kappa_{0q}$, $0<\kappa'_q<\kappa_q$, где κ_{0q}, κ_q — числа из леммы 33.1 и теорем 43.1–43.4.

Утверждение 44.2 следует из утверждений 39.1–39.3.

44.5. Функции G_i

Утверждение 44.3. *Найдутся такие постоянные δ, μ_3, C, C°, $\widetilde{C}$, что $\delta>0$, $0<\mu_3\leqslant\mu_2$, $\mu_3<\bar{\mu}$, $C^\circ\geqslant 0$ и при*

$$\|u\|\leqslant\delta,\quad (t,\mu)\in D_{t\mu}(\mu_3),\quad |\varepsilon|\leqslant\mu_3,\quad u\in\mathbf{C}^N,\quad \varepsilon\in\mathbf{C} \tag{44.9}$$

функции $G_i(u,t,\mu,\varepsilon)$, $i=\overline{1,m}$, представимы в виде

$$G_i(u,t,\mu,\varepsilon)=B'_i(t,\mu)u+G'_i(u,t,\mu,\varepsilon), \tag{44.10}$$

где B'_i, G'_i непрерывны по t, G'_i аналитичны по u, ε,

$$\|B'_i(t,\mu)\|\leqslant g'_1(t)\mu,\quad G'_i(u,t,\mu,\varepsilon)\ll\varphi(u,\varepsilon)(\arg u,\varepsilon),$$

$$\varphi(u,\varepsilon)\equiv\frac{\widetilde{C}}{\delta-\Sigma u_d}\left[(\Sigma u_d)^2+\frac{\varepsilon}{\mu_3-\varepsilon}\right],\quad \Sigma u_d\equiv u_1+\ldots+u_N, \tag{44.11}$$

$g'_1(t)$ — функция $g_1(t)$ из (44.3) с фиксированными постоянными.

Доказательство. Положим

$$
\begin{aligned}
B_i'(t,\mu) &\equiv F_{ix}\big(z^{(0)}(t,\mu),t,0\big) - F_{ix}\big(X_0(t,\mu),t,0\big),\\
G_i'(u,t,\mu,\varepsilon) &\equiv F_i\big(u+z^{(0)}(t,\mu)+x^\circ(\varepsilon)-x^\circ(0),t,\varepsilon\big) - \\
&\quad - F_i\big(z^{(0)}(t,\mu),t,0\big) - F_{ix}\big(z^{(0)}(t,\mu),t,0\big)u.
\end{aligned}
\tag{44.12}
$$

Тогда справедлива формула (44.10). Из (44.12) следуют равенства

$$
\begin{aligned}
G_i'(u,t,\mu,\varepsilon) &= \big[F_i\big(u+z^{(0)}(t,\mu)+x^\circ(\varepsilon)-x^\circ(0),t,\varepsilon\big) - F_i\big(u+z^{(0)}(t,\mu),t,0\big)\big] + \\
&\quad + \big[F_i\big(u+z^{(0)}(t,\mu),t,0\big) - F_i\big(z^{(0)}(t,\mu),t,0\big) - F_{ix}\big(z^{(0)}(t,\mu),t,0\big)u\big] = \\
&= \int_0^1 G_{i1}(u,t,\mu,\varepsilon,\theta)d\theta + \sum_{d=1}^{N}\int_0^1\int_0^1 G_{i2}(u,t,\mu,\theta,\theta_1)d\theta_1 d\theta u u_d,
\end{aligned}
\tag{44.13}
$$

$$
B_i'(t,\mu) \equiv \int_0^1 G_{i3}(t,\mu,\theta)\,d\theta,
$$

$$
G_{i1}(u,t,\mu,\varepsilon,\theta) \equiv F_{ix}(Y_1,t,\theta\varepsilon)\big[x^\circ(\varepsilon)-x^\circ(0)\big] + F_{i\mu}(Y_1,t,\theta\varepsilon)\varepsilon,
$$

$$
G_{i2}(u,t,\mu,\theta,\theta_1) \equiv \theta\frac{\partial^2 F_i}{\partial x\partial x_d}(Y_2,t,0),
$$

$$
G_{i3}(t,\mu,\theta) \equiv \sum_{d=1}^{N}\frac{\partial^2 F_i}{\partial x\partial x_d}(Y_3,t,0)\big[z_d^{(0)}(t,\mu) - X_{0d}(t,\mu)\big],
$$

$$
Y_1 = u + z^{(0)}(t,\mu) + \theta\big[x^\circ(\varepsilon)-x^\circ(0)\big], \quad Y_2 = z^{(0)}(t,\mu) + \theta\theta_1 u,
$$

$$
Y_3 = X_0(t,\mu) + \theta\big[z^{(0)}(t,\mu) - X_0(t,\mu)\big].
$$

Выберем δ, μ_3 из множества $\delta > 0$, $0 < \mu_3 \leqslant \mu_2$, $\mu_3 < \bar{\mu}$ так, чтобы при выполнении неравенств (44.9) и неравенств $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$ точки Y_1, Y_2, Y_3 принадлежали замкнутому подмножеству $\overline{CD} \subset CD_x$. Возможность такого выбора следует из условия 43.2, неравенства (44.2) и из утверждения 44.1. Из условий 43.1, 43.2 и формул (44.13) следует, что функции G_{i1}, G_{i2}, G_{i3} определены и аналитичны по u, ε на множестве (44.9) и, значит, могут быть представлены степенными рядами по $u_1, \ldots, u_N, \varepsilon$.

Если скалярная функция ограничена по модулю в области аналитичности, то на любом замкнутом ограниченном подмножестве ее производные тоже ограничены по модулю [4]. Поэтому производные F_i в формулах (44.13) ограничены по норме на множестве (44.9).

Применяя интегральную формулу (3.2) к функциям (44.13) и используя ограниченность производных F_i, получим мажорирующие ряды для

G_{i1}, G_{i2}; используя (44.2), получим оценку G_{i3}:

$$\begin{gathered}
G_{i1}(u,t,\mu,\varepsilon,\theta) \ll \frac{C\varepsilon}{(\delta-\Sigma u_d)(\mu_3-\varepsilon)}(\arg u,\varepsilon),\\
G_{i2}(u,t,\mu,\theta,\theta_1) \ll \frac{C}{\delta-\Sigma u_d}(\arg u), \quad \|G_{i3}(t,\mu,\theta)\| \leqslant g_1(t)\mu.
\end{gathered} \tag{44.14}$$

Здесь $(t,\mu)\in D_{t\mu}(\mu_3)$, $g_1(t)$ задается формулами (44.3) (вообще говоря, с другими, чем в (44.3), постоянными). Подставляя (44.14) в (44.13), получим соотношения (44.11). Непрерывность функций B_i', G_i' по t следует из формул (44.12) и из гладкости функций F_i, $z^{(0)}(t,\mu)$, $X_0(t,\mu)$. □

44.6. Мажоранта ряда (44.6)

Используя (44.8), получим следующие неравенства на множестве $(t,\mu)\in D_{t\mu}(\mu_3)$:

$$\sum_{l=i+1}^{m}\mu^{K_l-K_i}\|P_{il*}(t,\mu)\| \leqslant C_1\mu^{\Delta K}, \quad i=\overline{1,m-1};$$

$$\begin{gathered}
\int_0^t\sum_{l=1}^{m}\|B_{il}(t,s,\mu)\|\,ds \leqslant \int_0^t\Big\{\sum_{l-2}^{m}\mu^{K_l}g'(t-s)\times\\
\times\Big[C+\sum_{q=2}^{m}C\mu^{-K_q}\exp\big\{-\kappa_{0q}'s\mu^{-K_q}\big\}\Big]+\\
+\sum_{l=2}^{i-1}\sum_{q=2}^{l-1}\mu^{K_l-2K_q}\exp\big\{-\kappa_q'(t-s)\mu^{-K_q}\big\}\times\\
\times\Big[C+\sum_{d=q+1}^{m}C\mu^{K_q-K_d}\exp\big\{-\kappa_{0d}'s\mu^{-K_d})\big\}\Big]_{(i\geqslant3)}+\sum_{l=i}^{m}\sum_{q=2}^{i-1}\mu^{K_l-2K_q}\times\\
\times\exp\big\{-\kappa_q'(t-s)\mu^{-K_q}\big\}\Big[C+\sum_{d=q+1}^{m}C\mu^{K_q-K_d}\exp\big\{-\kappa_{0d}'s\mu^{-K_d}\big\}\Big]_{(i\geqslant3)}+\\
+\sum_{l=2}^{i}C\mu^{-K_{l-1}}\exp\big\{-\kappa_l'(t-s)\mu^{-K_l}\big\}_{(i\geqslant2)}+\\
+\sum_{l=i+1}^{m}\mu^{K_l-2K_i}\exp\big\{-\kappa_i'(t-s)\mu^{-K_i}\big\}\times\\
\times\Big[C+\sum_{q=i+1}^{m}C\mu^{K_i-K_q}\exp\big\{-\kappa_{0q}'s\mu^{-K_q}\big\}\Big]_{(2\leqslant i<m)}\Big\}\,ds \leqslant \mu^{\Delta K}g_1(t)\big|_{C=C_1},
\end{gathered}$$

$$\int\limits_0^t \sum_{l=1}^m \|P_{il}(t,s,\mu)\|\,ds \leqslant \int\limits_0^t \Big\{ \sum_{l=1}^m g'(t-s) + \tag{44.15}$$

$$+\sum_{l=i}^m \sum_{q=2}^i C\mu^{-K_q} \exp\{-\kappa_q'(t-s)\mu^{-K_q}\}\langle i\geqslant 2\rangle \Big\}\,ds \leqslant \widetilde{g}_1(t) \equiv g_1(t)\Big|_{C=C_3},$$

$$\int\limits_0^t \sum_{l=1}^m \|P_{il}(t,s,\mu)\| g_1'(s)\,ds \leqslant \int\limits_0^t \Big\{ \sum_{l=1}^m g'(t-s) +$$

$$+\sum_{l=i}^m \sum_{q=2}^i C\mu^{-K_q} \exp\{-\kappa_q'(t-s)\mu^{-K_q}\}\langle i\geqslant 2\rangle \Big\} g_1(s)\,ds \leqslant g_2(t), \quad i=\overline{1,m};$$

$$g_2(t) \equiv \begin{cases} C & \text{для теорем 43.1, 43.2,} \\ C^{\circ} t^{2(\kappa_1+1)} + C & \text{для теоремы 43.3,} \\ (C^{\circ} t + C)\exp\{\kappa_1 t\} & \text{для теоремы 43.4,} \end{cases}$$

$$\Delta K \equiv \min_{i=\overline{2,m}} \{K_i - K_{i-1}\}, \quad C_1\mu^{\Delta K} + \mu^{\Delta K} g_1(t)\Big|_{C=C_2} + \mu g_2(t) \leqslant \mu g_2'(t).$$

Здесь $g_2'(t)$ — функция $g_2(t)$ из (44.15) с фиксированными постоянными. Рассмотрим следующие уравнения:

$$v_d = \psi(v,t,\mu,\varepsilon), \quad d=\overline{1,N},$$

$$\psi(v,t,\mu,\varepsilon) \equiv \frac{\widetilde{C}\widetilde{g}_1(t)}{\big[1-\mu g_2'(t)\big](\delta - v_1 - \ldots - v_N)} \Big[(v_1+\ldots+v_N)^2 + \frac{\varepsilon}{\mu_3 - \varepsilon} \Big]. \tag{44.16}$$

Из них следуют равенства

$$a v_d^2 - b v_d + c = 0, \quad d=\overline{1,N},$$

$$a \equiv N\big[1-\mu g_2'(t) + N\widetilde{C}\widetilde{g}_1(t)\big], \quad b \equiv \delta\big[1-\mu g_2'(t)\big], \quad c \equiv \frac{\varepsilon \widetilde{C}\widetilde{g}_1(t)}{\mu_3 - \varepsilon}. \tag{44.17}$$

Из двух решений квадратного уравнения для v_d рассмотрим решение, обращающееся в 0 при $\varepsilon = 0$:

$$v_1 = \ldots = v_N = \widetilde{v}(t,\mu,\varepsilon) \equiv \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta \equiv b^2 - 4ac. \tag{44.18}$$

Из формул (44.17), (44.18) для $\widetilde{v}, a, b, c$ видно, что функция $\widetilde{v}(t,\mu,\varepsilon)$ аналитична по ε на множестве $a \neq 0$, $\varepsilon \neq \mu_3$, $\Delta \neq 0$. Функция a не зависит от ε. Уравнение $\Delta = 0$ имеет один корень $\varepsilon = \varepsilon_1$,

$$\varepsilon_1 \equiv \mu_3 \Big\{ 1 + \frac{4N\widetilde{C}\widetilde{g}_1(t)\big[1-\mu g_2'(t) + N\widetilde{C}\widetilde{g}_1(t)\big]}{\delta^2\big[1-\mu g_2'(t)\big]^2} \Big\}^{-1}. \tag{44.19}$$

Представим $v_d(t, \mu, \varepsilon)$ в виде

$$v_d(t, \mu, \varepsilon) = \frac{2c}{b + \sqrt{\Delta}} = \varepsilon g_3(t) v_d'(t, \mu, \varepsilon),$$

$$g_3(t) \equiv \begin{cases} C & \text{для теорем 43.1, 43.2,} \\ C^\circ t^{2(\kappa_1+1)} + C & \text{для теоремы 43.3,} \\ C \exp\{2\kappa_1 t\} & \text{для теоремы 43.4.} \end{cases} \tag{44.20}$$

Из формул (44.1), (44.15), (44.19) для ε_1, $\widetilde{g}_1$, g_2', t_* следует: найдется такое значение μ_4 и постоянные C, C° в формуле для $g_3(t)$, что $0 < \mu_4 \leqslant \mu_3$, $C^\circ \geqslant 0$ и при $(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu_4)$ справедливы неравенства $1 - \mu g_2'(t) > 0$, $g_3^{-1}(t) < \varepsilon_1 < \mu_3$, функции $v_d(t, \mu, \varepsilon)$ ограничены по модулю на контуре $|\varepsilon| = g_3^{-1}(t)$, $\varepsilon \in \mathbf{C}$. Поэтому $v_d(t, \mu, \varepsilon)$ аналитичны по ε на множестве $(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu_4)$, $|\varepsilon| \leqslant g_3^{-1}(t)$ и, значит, представимы в виде ряда

$$v_d(t, \mu, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} v_d^{(k)}(t, \mu)\varepsilon^k, \quad v_d^{(0)}(t, \mu) = 0, \quad d = \overline{1, N}. \tag{44.21}$$

Применяя к v_d' в (44.20) интегральную формулу Коши (3.2) по контуру $|\varepsilon| = g_3^{-1}(t)$, получим мажорирующий ряд для (44.21):

$$v_d(t, \mu, \varepsilon) \ll \frac{\varepsilon g_3(t)}{1 - \varepsilon g_3(t)}(\arg \varepsilon), \quad d = \overline{1, N}. \tag{44.22}$$

Здесь постоянные в формуле для $g_3(t)$, вообще говоря, больше своих первоначальных значений (44.20). Из (44.16), (44.18) следует, что коэффициенты ряда (44.21) можно найти по формулам

$$v_d^{(0)}(t, \mu) = 0,$$

$$v_d^{(k)}(t, \mu) = \left[\psi\left(\sum_{j=0}^{k-1} v^{(j)}(t, \mu)\varepsilon^j, t, \mu, \varepsilon\right)\right]^{(k)} = \left[\psi\left(\sum_{j=0}^{\infty} v^{(j)}(t, \mu)\varepsilon^j, t, \mu, \varepsilon\right)\right]^{(k)}, \quad k \geqslant 1, \tag{44.23}$$

$v_d^{(k)}(t, \mu)$ — положительные, неубывающие функции t, $d = \overline{1, N}$.

44.7. Коэффициенты ряда (44.6)

Утверждение 44.4. *На множестве*

$$(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu_4), \quad |\varepsilon| < g_3^{-1}(t) \tag{44.24}$$

коэффициенты ряда (44.6) *существуют, единственны, непрерывны по* t, *ряд* (44.6) *сходится,*

$$u(t, \mu, \varepsilon) \ll \frac{\varepsilon g_3(t)}{1 - \varepsilon g_3(t)}(\arg \varepsilon). \tag{44.25}$$

Доказательство. Предположим, что при $(t,\mu)\in D_{t\mu}(\mu_4)$, $j=\overline{0,k-1}$, $d=\overline{1,N}$ функции $u_d^{(j)}(t,\mu)$ существуют, единственны, непрерывны по t и удовлетворяют неравенствам

$$\left|u_d^{(j)}(t,\mu)\right|\leqslant v_d^{(j)}(t,\mu), \tag{44.26}$$

где $v_d^{(j)}(t,\mu)$ — коэффициенты ряда (44.21). Тогда из (44.4), (44.5), (44.10), (44.12) следуют соотношения

$$\begin{gathered}u^{(0)}(t,\mu)=0,\\ \mu^{K_i}\frac{du_i^{(k)}}{dt}=B_i''(t,\mu)u^{(k)}+\left[G_i'\left(\sum_{j=0}^{k-1}u^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j,t,\mu,\varepsilon\right)\right]^{(k)},\\ u_i^{(k)}(0,\mu)=0,\quad i=\overline{1,m},\quad B_i''(t,\mu)=F_{iz}\left(z^{(0)}(t,\mu),t,0\right),\quad k\geqslant 1.\end{gathered} \tag{44.27}$$

Функция $z^{(0)}(t,\mu)$ как решение уравнений (42.4) непрерывна по t. Отсюда, из формул (44.12), (44.27) для B_i'', G_i' следует, что правые части дифференциальных уравнений (44.27) непрерывны по t и линейны по $u^{(k)}$ при $(t,\mu)\in D_{t\mu}(\mu_4)$. Из теоремы о существовании и единственности решения системы линейных дифференциальных уравнений [4] следует: решение $u^{(k)}(t,\mu)$ задачи (44.27) существует, единственно и непрерывно по t при $(t,\mu)\in D_{t\mu}(\mu_4)$. Чтобы оценить $u^{(k)}(t,\mu)$, рассмотрим интегральные уравнения, которые следуют из (44.7) и которые эквивалентны уравнениям (44.27):

$$\begin{gathered}u^{(0)}(t,\mu)=0,\\ u_i^{(k)}(t,\mu)=-\sum_{l=i+1}^{m}\mu^{K_l-K_i}P_{il*}(t,\mu)\cdot u_l^{(k)}(t,\mu)_{(i<m)}+\\ +\int_0^t\sum_{l=1}^{m}\Bigg\{B_{iil}(t,s,\mu)\cdot u_l^{(k)}(s,\mu)+\\ +P_{iil}(t,s,\mu)\left[G_l\left(\sum_{j=0}^{\infty}u^{(j)}(s,\mu)\varepsilon^j,s,\mu,\varepsilon\right)\right]^{(k)}\Bigg\}ds,\\ i=\overline{1,m},\quad k\geqslant 1.\end{gathered} \tag{44.28}$$

Обозначим

$$w(t,\mu)=\max_{0\leqslant s\leqslant t}\left\|u^{(k)}(s,\mu)\right\|. \tag{44.29}$$

$w(t,\mu)$ — положительная, непрерывная, неубывающая функция t. Используя свойства мажорирующих рядов [39], из (44.10), (44.11), (44.15),

(44.16), (44.23), (44.28), (44.29) получим

$$\left\|u_i^{(k)}(t,\mu)\right\| \leqslant \sum_{l=i+1}^{m} \mu^{K_l-K_i}\|P_{il*}(t,\mu)\|\cdot\left\|u_l^{(k)}(t,\mu)\right\|_{(i<m)}+$$

$$+\int_0^t\sum_{l=1}^{m}\Big\{\|B_{il}(t,s,\mu)\|\cdot\left\|u_l^{(k)}(s,\mu)\right\|+$$

$$+\|P_{il}(t,s,\mu)\|\Big\{B_l'(s,\mu)\|\cdot\|u^{(k)}(s,\mu)\|+$$

$$+\left\|\left[G_l'\left(\sum_{j=0}^{\infty}u^{(j)}(s,\mu)\varepsilon^j,s,\mu,\varepsilon\right)\right]^{(k)}\right\|\Big\}\Big\}\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{l=i+1}^{m}\mu^{K_l-K_i}\|P_{il*}(t,\mu)\|\cdot w(t,\mu)_{(i<m)}+\int_0^t\sum_{l=1}^{m}\|B_{il}(t,s,\mu)\|\cdot w(t,\mu)\,ds+$$

$$+\int_0^t\sum_{l=1}^{m}\|P_{il}(t,s,\mu)\|\left\{g_1'(s)\mu w(t,\mu)+\left[\varphi\left(\sum_{j=0}^{k-1}v^{(j)}(s,\mu)\varepsilon^j,\varepsilon\right)\right]^{(k)}\right\}ds\leqslant$$

$$\leqslant\left[C_1\mu^{\Delta K}+\mu^{\Delta K}g_1(t)\big|_{C=C_2}+\right.$$

$$\left.+g_2(t)\mu\right]w(t,\mu)+\widetilde{g}_1(t)\left[\varphi\left(\sum_{j=0}^{k-1}v^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j,\varepsilon\right)\right]^{(k)}\leqslant$$

$$\leqslant\mu g_2'(t)w(t,\mu)+\left[\widetilde{g}_1(t)\varphi\left(\sum_{j=0}^{\infty}v^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j,\varepsilon\right)\right]^{(k)},$$

$$w(t,\mu)\leqslant\mu g_2'(t)w(t,\mu)+\left[1-\mu g_2'(t)\right]\cdot\left[\psi\left(\sum_{j=0}^{\infty}v^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j,t,\mu,\varepsilon\right)\right]^{(k)},$$

$$|u_d^{(k)}(t,\mu)|\leqslant\left\|u^{(k)}(t,\mu)\right\|\leqslant w(t,\mu)\leqslant v_d^{(k)}(t,\mu).$$

Здесь использовалось неравенство $1-\mu g_2'>0$, справедливое при $(t,\mu)\in D_{t\mu}(\mu_4)$. Так как коэффициенты при нулевой степени ε в (44.6), (44.21) равны нулю, то отсюда по индукции получаем: при $(t,\mu)\in D_{t\mu}(\mu_4)$, $k=0,1,\ldots$ функции $u^{(k)}(t,\mu)$ существуют, единственны, непрерывны по t и удовлетворяют неравенствам $|u_d^{(k)}(t,\mu)|\leqslant v_d^{(k)}(t,\mu)$, $d=\overline{1,N}$. Таким образом, ряд (44.21) является мажорантой ряда (44.6). Отсюда и из (44.22) следует: на множестве (44.24) ряд (44.6) сходится и справедливы соотношения (44.25). □

44.8. Сходимость ряда (42.3)

Утверждение 44.5. *При* $(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu_4)$ *ряд* (42.3) *сходится к решению задачи* (22.1).

Доказательство. Рассмотрим правые части уравнений (44.7), предполагая, что $u(t, \mu, \varepsilon)$ — сумма ряда (44.6). Из аналитичности функции G_l по u, ε, функции u по ε, из непрерывности по t, s функций B_{iil}, P_{iil}, G_l и из соотношений (44.10), (44.11), (44.25) для мажорирующих рядов следует: 1) подынтегральные выражения в (44.7) разлагаются в ряды

$$f_i(t, s, \mu, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} f_i^{(k)}(t, s, \mu)\varepsilon^k; \tag{44.30}$$

2) функции $f_i^{(k)}(t, s, \mu)$ непрерывны по s на множестве $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_*(\mu)$, $0 < \mu \leqslant \mu_4$, $|\varepsilon g_3(s)| < 1$, 3) при фиксированных значениях t, μ, ε из множества (44.24) ряд (44.30) сходится равномерно на отрезке $0 \leqslant s \leqslant t$. Таким образом, для ряда (44.30) выполняются условия почленного интегрирования: при $0 \leqslant s \leqslant t$ члены ряда непрерывны по s и ряд сходится равномерно. Поэтому интеграл от суммы ряда (44.30) равен сумме интегралов от его членов, и, значит, правые части уравнений (44.7) разлагаются в ряд по степеням ε. Его члены совпадают с членами ряда (44.6) по построению ряда (44.6) (смотрите формулы (44.28)). Это означает, что сумма ряда (44.6) является решением уравнений (44.7) и задачи (44.5) на множестве (44.24). Отсюда и из формулы (44.4) следует, что на множестве (44.24) решение задачи (42.1) существует и представимо в виде сходящегося ряда (42.2), где

$$z^{(k)}(t, \mu) = u^{(k)}(t, \mu) + \left[x^\circ(\varepsilon)\right]^{(k)}, \quad k \geqslant 1. \tag{44.31}$$

Единственность решения задачи (42.1) на множестве (44.24) следует из гладкости правых частей дифференциальных уравнений (42.1). Найдем мажоранту ряда (42.2). Из условия 43.2 и из соотношений (44.25), (44.31) получим:

$$\left\|z^{(k)}(t, \mu)\right\| \leqslant \left\|u^{(k)}(t, \mu)\right\| + \left\|\left[x^\circ(\varepsilon)\right]^{(k)}\right\| \leqslant g_3^k(t) + C^k \leqslant g_3^k(t), \quad k \geqslant 1$$

(здесь постоянные в $g_3(t)$ увеличиваются). Так как $z^{(0)}(t, \mu) \in \overline{D}_{z1}$ и, значит, $\|z^{(0)}(t, \mu)\| \leqslant C$, то отсюда следует, что

$$z(t, \mu, \varepsilon) \ll C + \frac{\varepsilon g_3(t)}{1 - \varepsilon g_3(t)}(\arg \varepsilon). \tag{44.32}$$

Таким образом, ряд (42.2) сходится к решению задачи (42.1) на множестве (44.24), и, значит, ряд (42.3) сходится к решению задачи (22.1) на множестве

$$(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu_4), \quad |\mu g_3(t)| < 1. \tag{44.33}$$

Рассмотрим функцию $\mu g_3(t_*(\mu))$. Из (44.1), (44.20) следуют формулы

$$\mu g_3(t_*(\mu)) = \begin{cases} C\mu^\gamma, \\ C^\circ \mu^\gamma + C\mu, \\ C\mu^\gamma, \end{cases} \quad \gamma \equiv \begin{cases} 1 & \text{для теорем 43.1, 43.2,} \\ 1-2\chi(\kappa_1+1) & \text{для теоремы 43.3,} \\ 1-2\kappa_1\chi & \text{для теоремы 43.4.} \end{cases}$$

Отсюда и из формулы (44.20) для g_3 получим, что при $(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu_4)$ справедливы неравенства $|\mu g_3(t)| \leqslant |\mu g_3(t_*(\mu))| \leqslant C_*\mu^\gamma$. Выберем μ_* так, чтобы выполнялись неравенства $0 < \mu_* \leqslant \mu_4$, $C_*\mu_*^\gamma < 1$. Это возможно, так как $\gamma > 0$. Множество $D_{t\mu}(\mu_*)$ является подмножеством (44.33). Отсюда и из (42.3), (44.32) следует, что на множестве $D_{t\mu}(\mu_*)$

$$x(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t, \mu)\mu^k \ll C + \sum_{k=1}^{\infty}(C_*\mu^\gamma)^k \tag{44.34}$$

и, значит, ряд (42.3) сходится к решению задачи (22.1) равномерно. □

§ 45. Доказательство теорем 43.5–43.8

45.1. Существование и единственность решения

Условия теоремы $43.J$ $(5 \leqslant J \leqslant 8)$ одновременно являются условиями теоремы $28.J_1$, $J_1 \equiv J - 4$. Поэтому найдется значение $\mu'_* > 0$, не зависящее от t, μ и такое, что решение задачи (22.1) существует и единственно при

$$(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu'_*), \quad D_{t\mu}(\mu'_*) \equiv \{(t, \mu)\colon 0 \leqslant t \leqslant t_*(\mu), 0 < \mu \leqslant \mu'_*\},$$
$$t_*(\mu) \equiv \begin{cases} T & \text{для теоремы 43.5,} \\ \infty & \text{для теоремы 43.6,} \\ T\mu^{-\chi} & \text{для теоремы 43.7,} \\ T - \chi \ln \mu & \text{для теоремы 43.8.} \end{cases} \tag{45.1}$$

45.2. Функция $z^{(0)}$

Утверждение 45.1. *Найдутся такие значения μ_1, C, C°, что $0 < \mu_1 \leqslant \mu'_*$, $C^\circ \geqslant 0$ и при $(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu_1)$ функция $z^{(0)}(t, \mu)$ существует единственна, удовлетворяет неравенству*

$$\|z^{(0)}(t, \mu) - X_0(t, \mu)\| \leqslant g_1(t)\mu, \tag{45.2}$$

значения $z^{(0)}(t, \mu)$ принадлежат замкнутому подмножеству $\overline{D}_{z1} \subset D_z$. Здесь

$$g_1(t) \equiv \begin{cases} C & \text{для теорем 43.5, 43.6,} \\ C^\circ t^{\kappa_1+1} + C & \text{для теоремы 43.7,} \\ C\exp\{\kappa_1 t\} & \text{для теоремы 43.8,} \end{cases} \tag{45.3}$$

$X_0(t, \mu)$ — *нулевое приближение решения задачи* (22.1), *построенное методом пограничных функций в* § 23:

$$X_0(t, \mu) = \sum_{j=1}^{m} y_j^{(0)}(\tau_j), \quad \tau_j = t\mu^{-K_j} \quad (\tau_1 = t, K_1 = 0).$$

Утверждение 45.1 доказано в § 44 (смотрите утверждение 44.1).

45.3. Окончание доказательства теорем 43.5–43.8 при n = 0

Из теоремы $28.J_1$ следует, что при $(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu'_*)$ решение задачи (22.1) удовлетворяет неравенству

$$\|x(t, \mu) - X_0(t, \mu)\| \leqslant g_1(t)\mu, \tag{45.4}$$

где g_1 определяется по формуле (45.3), $J_1 = J-4$, $5 \leqslant J \leqslant 8$. Отметим, что на каждом этапе доказательства (этапов — конечное число) постоянные в функции $g_1(t)$, вообще говоря, увеличиваются. Из (45.2), (45.4) получим неравенства

$$\|x(t, \mu) - Z_0(t, \mu)\| = \left\|x(t, \mu) - z^{(0)}(t, \mu)\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \|x(t, \mu) - X_0(t, \mu)\| + \left\|z^{(0)}(t, \mu) - X_0(t, \mu)\right\| \leqslant g_1(t)\mu,$$

справедливые при $(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu_*)$, $\mu_* \equiv \mu_1$. Теоремы 45.5–45.8 при $n = 0$ доказаны.

45.4. Функции $z^{(k)}$

Утверждение 45.2. *Найдутся такие значения* μ_2, C, C°, *что* $0 < \mu_2 \leqslant \mu_1$, $C^\circ \geqslant 0$ *и при* $(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu_2)$, $k = \overline{1, n}$, $n \geqslant 1$ *функции* $z^{(k)}(t, \mu)$ *существуют, единственны, непрерывны по* t *и удовлетворяют неравенствам*

$$\|z^{(k)}(t, \mu)\| \leqslant g_{2k}(t), \tag{45.5}$$

$$g_{2k}(t) \equiv \begin{cases} C & \text{для теорем 43.5, 43.6,} \\ C^\circ t^{(\kappa_1+1)(2k-1)} + C & \text{для теоремы 43.7,} \\ C\exp\{k\kappa_1 t\} & \text{для теоремы 43.8.} \end{cases}$$

Доказательство. Из (44.4) следуют формулы

$$\begin{gathered} u = z - z^{(0)}(t, \mu) - x^\circ(\varepsilon) + x^\circ(0), \\ u^{(0)}(t, \mu) = 0, \quad u^{(k)}(t, \mu) \equiv z^{(k)}(t, \mu) - \left[x^\circ(\varepsilon)\right]^{(k)}, \quad k = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{45.6}$$

Функции $u^{(k)}(t, \mu)$ удовлетворяют уравнениям (44.27), (44.28). Чтобы оценить эти функции, введем обозначение

$$v^{(k)}(t, \mu) \equiv \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \left\|u^{(k)}(s, \mu)\right\|, \quad k = \overline{1, n}. \tag{45.7}$$

$v^{(k)}(t, \mu)$ — положительные, монотонно возрастающие функции t.

Рассмотрим случай $k = 1$. Правая часть дифференциального уравнения (44.27) линейна по $u^{(1)}$ и непрерывна по t при $(t,\mu) \in D_{t\mu}(\mu_1)$, $k = 1$. Из теоремы о существовании и единственности решения системы линейных дифференциальных уравнений [4] и из формулы (45.6) следует, что $u^{(1)}(t,\mu)$, $z^{(1)}(t,\mu)$ существуют, единственны, непрерывны по t при $(t,\mu) \in D_{t\mu}(\mu_1)$. Чтобы оценить $u^{(1)}(t,\mu)$, рассмотрим равенства вытекающие из (44.5):

$$\Big[G_i\Big(\sum_{j=0}^{\infty} u^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j, t, \mu, \varepsilon\Big)\Big]^{(1)} = F_{iz}\big(z^{(0)}(t,\mu), t, 0\big)\cdot\big[u^{(1)}(t,\mu) + x^{\circ}_{\mu}(0)\big] +$$

$$+ F_{i\mu}\big(z^{(0)}(t,\mu), t, 0\big) - F_{iz}\big(X_0(t,\mu), t, 0\big)\cdot u^{(1)}(t,\mu) =$$

$$= \int_0^1 \sum_{d=1}^{N} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial x_d}(Y, t, 0)\big[z^{(0)}_d(t,\mu) - X_{0d}(t,\mu)\big]\, d\theta u^{(1)}(t,\mu) +$$

$$+ F_{iz}\big(z^{(0)}(t,\mu), t, 0\big)\cdot x^{\circ}_{\mu}(0) + F_{i\mu}\big(z^{(0)}(t,\mu), t, 0\big),$$

$$Y \equiv X_0(t,\mu) + \theta\big[z^{(0)}(t,\mu) - X_0(t,\mu)\big]. \tag{45.8}$$

Выберем μ_{21} так, что $0 < \mu_{21} \leqslant \mu_1$ и при $(t,\mu) \in D_{t\mu}(\mu_{21})$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ $Y \in D_x$. Из условий 26.5, 26.7 и неравенства (45.2) следует, что это возможно. Тогда при $(t,\mu) \in D_{t\mu}(\mu_{21})$ справедливы неравенства

$$\Big\|\Big[G_i\Big(\sum_{j=0}^{\infty} u^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j, t, \mu, \varepsilon\Big)\Big]^{(1)}\Big\| \leqslant$$

$$\leqslant C\|z^{(0)}(t,\mu) - X_0(t,\mu)\|\cdot\|u^{(1)}(t,\mu)\| + C \leqslant g_1(t)\mu v^{(1)}(t,\mu) + C, \tag{45.9}$$

следующие из условий 26.2, 26.3 и соотношений (45.2), (45.7), (45.8). Отсюда и из (44.15), (44.28), (45.9) получим неравенства для $v^{(1)}(t,\mu)$:

$$\|u^{(1)}_i(t,\mu)\| \leqslant \sum_{l=i+1}^{m} \mu^{K_l - K_i}\|P_{il*}(t,\mu)\|\cdot\|u^{(1)}(t,\mu)\|_{(i<m)} +$$

$$+ \int_0^t \sum_{l=1}^{m}\|B_{iil}(t,s,\mu)\|\, ds v^{(1)}(t,\mu) + \int_0^t \sum_{l=1}^{m}\|P_{iil}(t,s,\mu)\| g_1(s)\, ds \mu v^{(1)}(t,\mu) +$$

$$+ \int_0^t \sum_{l=1}^{m}\|P_{iil}(t,s,\mu)\|\, ds C \leqslant \big[C\mu^{\Delta K} + \mu^{\Delta K} g_1(t) + \mu g_2(t)\big] v^{(1)}(t,\mu) + g_1(t),$$

$$i = \overline{1,m}, \quad \Delta K \equiv \min_{i=\overline{2,m}}\{K_i - K_{i-1}\}, \quad v^{(1)}(t,\mu) \leqslant g_2(t)\mu v^{(1)}(t,\mu) + g_1(t),$$

$$\big[1 - g_2(t)\mu\big] v^{(1)}(t,\mu) \leqslant g_1(t), \tag{45.10}$$

$$g_2(t) \equiv \begin{cases} C & \text{для теорем 43.5, 43.6,} \\ C^\circ t^{2(\kappa_1+1)} + C & \text{для теоремы 43.7,} \\ (C^\circ t + C)\exp\{\kappa_1 t\} & \text{для теоремы 43.8.} \end{cases}$$

Здесь при переходе от одного неравенства к другому постоянные в формуле для g_2 увеличиваются. Выберем $\mu_{22} > 0$ так, что $0 < \mu_{22} \leqslant \mu_{21}$ и при $(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu_{22})$ выполняются неравенства $g_2(t)\mu \leqslant 1/2$, $1 - g_2(t)\mu \geqslant 1/2$. Из формул (45.1), (45.10) для t_*, g_2 следует, что это возможно. Тогда при $(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu_{22})$ из (45.6), (45.7), (45.10) получим неравенство (45.5) при $k = 1$:

$$\left\|u^{(1)}(t, \mu)\right\| \leqslant v^{(1)}(t, \mu) \leqslant g_1(t),$$
$$\left\|z^{(1)}(t, \mu)\right\| \leqslant \left\|x^0_\mu(0)\right\| + \left\|u^{(1)}(t, \mu)\right\| \leqslant g_{21}(t) = g_1(t).$$

Дальше при доказательстве используется математическая индукция. Предположим, что при $(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu_{23})$, $0 < \mu_{23} \leqslant \mu_{22}$ функции $z^{(j)}(t, \mu)$, $j = \overline{1, k-1}$, $k \geqslant 2$, существуют, единственны, непрерывны по t и удовлетворяют неравенствам

$$\left\|z^{(j)}(t, \mu)\right\| \leqslant g_{2j}(t). \tag{45.11}$$

Тогда из формул (45.6) следует, что при $(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu_{23})$ функции $u^{(j)}(t, \mu)$, $j = \overline{1, k-1}$, существуют, единственны, непрерывны по t и удовлетворяют неравенствам

$$\left\|u^{(j)}(t, \mu)\right\| \leqslant g_{2j}(t). \tag{45.12}$$

Поэтому правая часть дифференциального уравнения (44.27) для $u^{(k)}$ линейна по $u^{(k)}$ и непрерывна по t при $(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu_{23})$. Отсюда и из (45.6) следует, что функции $u^{(k)}(t, \mu)$, $z^{(k)}(t, \mu)$ существуют, единственны и непрерывны по t на множестве $D_{t\mu}(\mu_{23})$. Рассмотрим равенства

$$\begin{gathered} \left[G_i\left(\sum_{j=0}^{\infty} u^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j, t, \mu, \varepsilon\right)\right]^{(k)} = Q_{ik1}(t,\mu) + Q_{ik2}(t,\mu), \\ Q_{ik1}(t,\mu) \equiv \left[F_{ix}\left(z^{(0)}(t,\mu), t, 0\right) - F_{ix}\left(X_0(t,\mu), t, 0\right)\right] u^{(k)}(t,\mu) = \\ = \int_0^1 \sum_{d=1}^{N} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x \partial x_d}(Y, t, 0)\left[z^{(0)}_d(t,\mu) - X_{0d}(t,\mu)\right] d\theta\, u^{(k)}(t,\mu), \\ Q_{ik2}(t,\mu) \equiv \left[F_i\left(\sum_{j=1}^{k-1} u^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j + z^{(0)}(t,\mu) + x^\circ(\varepsilon) - x^\circ(0), t, \varepsilon\right)\right]^{(k)}. \end{gathered} \tag{45.13}$$

Здесь использованы формулы (44.5), (45.8) для G_i, Y. При $(t,\mu)\in D_{t\mu}(\mu_{23})$ справедливы неравенства, которые получаются так же, как неравенства (45.9):

$$\left\|Q_{ik1}(t,\mu)\right\|\leqslant C\left\|z^{(0)}(t,\mu)-X_0(t,\mu)\right\|\times$$
$$\times\left\|u^{(k)}(t,\mu)\right\|\leqslant g_1(t)\mu v^{(k)}(t,\mu). \tag{45.14}$$

Разлагая F_i в ряд по степеням ε, получим, что $Q_{ik2}(t,\mu)$ является суммой произведений констант на функции

$$\frac{\partial^p F_i\big(z^{(0)}(t,\mu),t,0\big)}{\partial x^{p_1}\partial\mu^{p_2}},\quad \prod_{q=1}^{k-1}\prod_{d=1}^{N}\left[u_d^{(q)}(t,\mu)\right]^{s_{qd}}$$

$$\Big(p=p_1+p_2\leqslant k,\quad s_{qd}\geqslant 0,\quad s_1\equiv\sum_{q=1}^{k-1}\sum_{d=1}^{N}qs_{qd}\leqslant k\Big).$$

Так как $z^{(0)}(t,\mu)\in D_x$ по утверждению 45.1, то отсюда, из условия 26.2 и неравенств (45.12) следуют соотношения

$$\|Q_{ik2}(t,\mu)\|\leqslant\sum_s C\Pi_s(t),\quad \Pi_s(t)\equiv\prod_{q=1}^{k-1}\prod_{d=1}^{N}\left[g_{2q}(t)\right]^{s_{qd}}. \tag{45.15}$$

Отсюда, используя формулу (45.5) для g_{2k}, получаем неравенство

$$\|Q_{ik2}(t,\mu)\|\leqslant C\quad \text{для теорем 43.5, 43.6.} \tag{45.16}$$

Рассмотрим теорему 43.7. Если $s_2\equiv\sum_{q=1}^{k-1}\sum_{d=1}^{N}s_{qd}=0$, то все $s_{qd}=0$ и, значит, $\Pi_s(t)=1$. Если $s_2=1$, то для одного набора $(q_*,d_*)s_{q_*d_*}=1$. Остальные $s_{qd}=0$. Отсюда и из (45.5), (45.15) получим

$$\Pi_s\leqslant C^\circ t^{(\kappa_1+1)(2q_*-1)}+C\leqslant C^\circ t^{(\kappa_1+1)(2k-3)}+C.$$

Если $s_2\geqslant 2$, то

$$\Pi_s\leqslant\prod_{q=1}^{k-1}\prod_{d=1}^{N}\left[C^\circ t^{(\kappa_1+1)(2q-1)}+C\right]^{s_{qd}}\leqslant Ct^{(\kappa_1+1)(2s_1-s_2)}+C\leqslant$$
$$\leqslant C^\circ t^{(\kappa_1+1)(2k-2)}+C.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\|Q_{ik2}(t,\mu)\|\leqslant C^\circ t^{2(\kappa_1+1)(k-1)}+C\quad \text{для теоремы 43.7.} \tag{45.17}$$

Рассмотрим теорему 43.8. Из (45.5), (45.15) следует, что

$$\|Q_{ik2}(t,\mu)\|\leqslant\sum_s C\exp\{s_1\kappa_1 t\}\leqslant C\exp\{k\kappa_1 t\}=g_{2k}(t).$$

Отсюда и из (45.13), (45.14), (45.16), (45.17) получаем, что при $(t,\mu)\in D_{t\mu}(\mu_{23})$

$$\left\|\left[G_i\left(\sum_{j=0}^{\infty}u^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j,t,\mu,\varepsilon\right)\right]^{(k)}\right\|\leqslant g_1(t)\mu v^{(k)}(t,\mu)+g_{3k}(t).$$

$$g_{3k}(t)\equiv\begin{cases}C & \text{для теорем 43.5, 43.6,}\\ C^\circ t^{2(\kappa_1+1)(k-1)}+C & \text{для теоремы 43.7,}\\ C\exp\{k\kappa_1 t\} & \text{для теоремы 43.8.}\end{cases}\qquad(45.18)$$

Из (44.8), (44.15), (44.28), (45.7), (45.18) получим неравенства для $v^{(k)}(t,\mu)$ на множестве $D_{t\mu}(\mu_{24})$ для некоторого μ_{24}, $0<\mu_{24}\leqslant\mu_{23}$:

$$\left\|u_i^{(k)}(t,\mu)\right\|\leqslant\sum_{l=i+1}^{m}\mu^{K_l-K_i}\|P_{il*}(t,\mu)\|\cdot\left\|u^{(k)}(t,\mu)\right\|_{(i<m)}+$$

$$+\int_0^t\sum_{l=1}^{m}\|B_{il}(t,s,\mu)\|ds\,v^{(k)}(t,\mu)+\int_0^t\sum_{l=1}^{m}\|P_{il}(t,s,\mu)\|g_1(s)\,ds\,\mu v^{(k)}(t,\mu)+$$

$$+\int_0^t\sum_{l=1}^{m}\|P_{il}(t,s,\mu)\|g_{3k}(s)\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\left[C\mu^{\Delta K}+g_1(t)\mu^{\Delta K}+g_2(t)\mu\right]v^{(k)}(t,\mu)+g_{2k}(t),\quad i=\overline{1,m},\qquad(45.19)$$

$$v^{(k)}(t,\mu)\leqslant g_2(t)\mu v^{(k)}(t,\mu)+g_{2k}(t),\quad\left[1-g_2(t)\mu\right]v^{(k)}(t,\mu)\leqslant g_{2k}(t).$$

Выберем такое значение μ_{25}, что $0<\mu_{25}\leqslant\mu_{24}$ и при $(t,\mu)\in D_{t\mu}(\mu_{25})$ выполняются неравенства $g_2(t)\mu\leqslant 1/2$, $1-g_2(t)\mu\geqslant 1/2$. Тогда при $(t,\mu)\in D_{t\mu}(\mu_{25})$ из (45.6), (45.7), (45.19) следует:

$$\left\|u^{(k)}(t,\mu)\right\|\leqslant v^{(k)}(t,\mu)\leqslant g_{2k}(t),$$

$$\left\|z^{(k)}(t,\mu)\right\|\leqslant\left\|u^{(k)}(t,\mu)\right\|+\left\|\left[x^\circ(\varepsilon)\right]^{(k)}\right\|\leqslant g_{2k}(t).$$

Получили утверждение 45.2 для $z^{(k)}(t,\mu)$. Так как утверждение 45.2 доказано для $z^{(1)}(t,\mu)$, то отсюда по индукции получаем, что утверждение 45.2 справедливо для всех $k=\overline{1,n}$ при некотором значении μ_2, $0<\mu_2\leqslant\mu_{22}\leqslant\mu_1$. □

45.5. Введение вспомогательной переменной

Обозначим

$$u\equiv z-\widetilde{Z}_n(t,\mu,\varepsilon)-x^\circ(\varepsilon)+\left[x^\circ(\varepsilon)\right]^{(\leqslant n)},$$

$$\widetilde{Z}_n(t,\mu,\varepsilon)\equiv\sum_{k=0}^{n}z^{(k)}(t,\mu)\varepsilon^k,\quad\left[x^\circ(\varepsilon)\right]^{(\leqslant n)}\equiv\sum_{k=0}^{n}\left[x^\circ(\varepsilon)\right]^{(k)}\varepsilon^k.\qquad(45.20)$$

Отметим, что u совпадает с переменной u из п. 45.4 при $n = 0$. Из (42.1), (42.4), (42.5) следует, что $u = (u_1, \dots, u_m)$ — решение следующей задачи Коши:

$$\mu^{K_i} \frac{du_i}{dt} = B_i(t, \mu)u + G_i(u, t, \mu, \varepsilon), \quad u_i \mid_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{45.21}$$

Здесь

$$\begin{gathered} B_i(t, \mu) = F_{ix}\big(X_0(t, \mu), t, 0\big), \\ G_i(u, t, \mu, \varepsilon) = F_i\big(u + \widetilde{Z}_n(t, \mu, \varepsilon) + x^\circ(\varepsilon) - [x^\circ(\varepsilon)]^{(\leqslant n)}, t, \varepsilon\big) - \\ - \sum_{k=0}^{n} \mu^{K_i} \frac{\partial z^{(k)}(t, \mu)}{\partial t} \varepsilon^k - F_{ix}\big(X_0(t, \mu), t, 0\big)u. \end{gathered} \tag{45.22}$$

Далее доказательство теорем 43.5–43.8 основано на применении теоремы 28.5 к задаче (45.21). В п. 45.6, 45.7 рассматриваются функции, необходимые для применения этой теоремы. В п. 45.8 теорема применяется.

45.6. Функции $G_i(0, t, \mu, \varepsilon)$

Утверждение 45.3. *Найдутся такие значения μ_3, C, C°, что $0 < \mu_3 \leqslant \mu_2$, $C^\circ \geqslant 0$ и при $(t, \mu, \varepsilon) \in D_{t\mu\varepsilon}(\mu_3)$ функции $G_i(0, t, \mu, \varepsilon)$, $i = \overline{1, m}$, существуют, единственны, непрерывны по t и удовлетворяют неравенству*

$$\|G_i(0, t, \mu, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^{n+1} g_{3n+1}(t). \tag{45.23}$$

Здесь $g_{3n+1}(t)$ определяется по формуле (45.18) *при* $k = n + 1$,

$$D_{t\mu\varepsilon}(\mu_3) \equiv \big\{(t, \mu, \varepsilon)\colon 0 \leqslant t \leqslant \widetilde{t}(\mu, \varepsilon), 0 < \mu \leqslant \mu_3, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \mu_3\big\}, \tag{45.24}$$

$$\widetilde{t}(\mu, \varepsilon) \equiv \begin{cases} T & \text{для теоремы 43.5,} \\ \infty & \text{для теоремы 43.6,} \\ \min\,(T\mu^{-\chi},\ T\varepsilon^{-\chi}) & \text{для теоремы 43.7,} \\ \min\,(T - \chi \ln \mu, T - \chi \ln \varepsilon) & \text{для теоремы 43.8.} \end{cases}$$

Доказательство. Из (42.4), (42.5), (45.22) следуют формулы

$$\begin{gathered} G_i(0, t, \mu, \varepsilon) = G_{i1}(t, \mu, \varepsilon) + G_{i2}(t, \mu, \varepsilon), \quad i = \overline{1, m}, \\ G_{i1}(t, \mu, \varepsilon) \equiv F_i\big(\widetilde{Z}_n(t, \mu, \varepsilon) + x^\circ(\varepsilon) - [x^\circ(\varepsilon)]^{(\leqslant n)}, t, \varepsilon\big) - \\ - F_i\big(\widetilde{Z}_n(t, \mu, \varepsilon), t, \varepsilon\big), \\ G_{i2}(t, \mu, \varepsilon) \equiv F_i\big(\widetilde{Z}_n(t, \mu, \varepsilon), t, \varepsilon\big) - \big[F_i\big(\widetilde{Z}_n(t, \mu, \varepsilon), t, \varepsilon\big)\big]^{(\leqslant n)}. \end{gathered} \tag{45.25}$$

Из утверждений 45.1, 45.2, из (45.24) и из условий 26.2, 26.3 следует существование, единственность и непрерывность по t функций $G_i(0, t, \mu, \varepsilon)$ на множестве $D_{t\mu\varepsilon}(\mu_{31})$ для некоторого значения μ_{31}, $0 < \mu_{31} \leqslant \mu_2$.

Оценим G_{i1}. Из (45.25) следует:

$$G_{i1}(t,\mu,\varepsilon)=\int\limits^{1} F_{ix}(Y,t,\varepsilon)\,d\theta\bigl\{x^{\circ}(\varepsilon)-\bigl[x^{\circ}(\varepsilon)\bigr]^{(\leqslant n)}\bigr\},$$

$$Y\equiv\widetilde{Z}_n(t,\mu,\varepsilon)+\theta x^{\circ}(\varepsilon)-\theta\bigl[x^{\circ}(\varepsilon)\bigr]^{(\leqslant n)}, \tag{45.26}$$

$$x^{\circ}(\varepsilon)-\bigl[x^{\circ}(\varepsilon)\bigr]^{(\leqslant n)}=\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1 \frac{d^{n+1}x^{\circ}(\mu)}{d\mu^{n+1}}\bigg|_{\mu=\theta_1\ldots\theta_{n+1}\varepsilon}\times$$
$$\times\,\theta_2\theta_3^2\ldots\theta_{n+1}^n\,d\theta_1\ldots\,d\theta_{n+1}\varepsilon^{n+1}.$$

Из (45.5), (45.20), (45.24) на множестве $D_{t\mu\varepsilon}(\mu_{31})$ получим соотношения

$$\bigl\|\widetilde{Z}_n(t,\mu,\varepsilon)-z^{(0)}(t,\mu)\bigr\|=\Bigl\|\sum_{k=1}^{n}z^{(k)}(t,\mu)\varepsilon^k\Bigr\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}g_{2k}(t)\varepsilon^k;$$
$$g_{2k}(t)\varepsilon^k=C\varepsilon^k\quad\text{для теорем 43.5, 43.6;}$$
$$g_{2k}(t)\varepsilon^k=\bigl[Ct^{(\kappa_1+1)(2k-1)}+C\bigr]\varepsilon^k\leqslant C\varepsilon^{k-\chi(\kappa_1+1)(2k-1)}+C\varepsilon^k\leqslant \tag{45.27}$$
$$\leqslant C\varepsilon^{1/2}+C\varepsilon^k\leqslant C\varepsilon^{1/2}\qquad\text{для теоремы 43.7;}$$
$$g_{2k}(t)\varepsilon^k=C\exp\{k\kappa_1 t\}\varepsilon^k\leqslant C\varepsilon^{k(1-\chi\kappa_1)}\leqslant C\varepsilon^{k/(n+2)}$$
$$\text{для теоремы 43.8.}$$

Здесь использованы неравенства $0\leqslant\chi<[2(\kappa_1+1)]^{-1}$ (теорема 43.7), $0\leqslant\chi<(n+1)[(n+2)\kappa_1]^{-1}$ (теорема 43.8). Из (45.26), (45.27), из условий 26.2, 26.3 и из утверждения 45.1 следует: найдется такое μ_3, что $0<\mu_3\leqslant\mu_{31}$ и при $(t,\mu,\varepsilon)\in D_{t\mu\varepsilon}(\mu_3)$ $\quad\widetilde{Z}_n(t,\mu,\varepsilon)\in D_x,\quad Y\in D_x$,

$$\|G_{i1}(t,\mu,\varepsilon)\|\leqslant C\varepsilon^{n+1}. \tag{45.28}$$

Оценим функцию G_{i2} из (45.25):

$$G_{i2}(t,\mu,\varepsilon)=\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1\frac{\partial^{n+1}F_i\bigl(\widetilde{Z}_n(t,\mu,\lambda),t,\lambda\bigr)}{\partial\lambda^{n+1}}\bigg|_{\lambda=\theta_1\ldots\theta_{n+1}\varepsilon}\times$$
$$\times\,\theta_2\theta_3^2\ldots\theta_{n+1}^n\,d\theta_1\ldots\,d\theta_{n+1}\varepsilon^{n+1}. \tag{45.29}$$

Подынтегральное выражение является линейной комбинацией произведений из следующих сомножителей:

1) $\theta_j,\ j=\overline{1,n+1}$;

2) $\dfrac{\partial^l F_i(x,t,\lambda)}{\partial x^{l_1}\partial\lambda^{l_2}}\bigg|_{x=\widetilde{Z}_n(t,\mu,\lambda),\lambda=\theta_1\ldots\theta_{n+1}\varepsilon}$, $l=l_1+l_2\leqslant n+1$;

3) $\Pi \equiv \prod_{k=1}^{n}\prod_{d=1}^{N}\left[\sum_{q=k}^{n} z_d^{(q)}(t,\mu)\frac{q!\varepsilon^{q-k}}{(q-k)!}\right]^{s_{kd}}$, $s_{kd} \geqslant 0$, $\sum_{k=1}^{n}\sum_{d=1}^{N} ks_{kd} \leqslant n+1$.

Отсюда и из (45.5) получим следующие неравенства при $(t,\mu,\varepsilon) \in D_{t\mu\varepsilon}(\mu_3)$.

Для теорем 43.5, 43.6

$$\|\Pi\| \leqslant \prod_{k=1}^{n}\prod_{d=1}^{N}\left(\sum_{q=k}^{n} C\varepsilon^{q-k}\right)^{s_{qd}} \leqslant C.$$

Для теоремы 43.7

$$\|\Pi\| \leqslant \prod_{k=1}^{n}\prod_{d=1}^{N}\left\{\sum_{q=k}^{n}\left[Ct^{(\kappa_1+1)(2q-1)}+C\right]\varepsilon^{q-k}\right\}^{s_{qd}} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n}\prod_{d=1}^{N}\left\{Ct^{(\kappa_1+1)(2k-1)}\sum_{q=0}^{n-k}[t^{2(\kappa_1+1)}\varepsilon]^q+C\right\}^{s_{qd}}.$$

Так как $t^{2(\kappa_1+1)}\varepsilon \leqslant C\varepsilon^{1-2\chi(\kappa_1+1)}$, $1-2\chi(\kappa_1+1)>0$, то

$$\|\Pi\| \leqslant \prod_{k=1}^{n}\prod_{d=1}^{N}[Ct^{(\kappa_1+1)(2k-1)}+C]^{s_{qd}} \leqslant C^{\circ}t^{(\kappa_1+1)2n}+C.$$

Последнее неравенство получено так же, как неравенство для Π_s в п. 45.4.

Для теоремы 43.8

$$\|\Pi\| \leqslant \prod_{k=1}^{n}\prod_{d=1}^{N}\left[\sum_{q=k}^{n} C\exp\{q\kappa_1 t\}\varepsilon^{q-k}\right]^{s_{qd}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\prod_{d=1}^{N}\exp\{ks_{qd}\kappa_1 t\}\left[\sum_{q=0}^{n-k} C\exp\{q\kappa_1 t\}\varepsilon^{q}\right]^{s_{qd}}.$$

Так как $\exp\{q\kappa_1 t\}\varepsilon^q \leqslant C\varepsilon^{q-\chi q\kappa_1} \leqslant C\varepsilon^{q/(n+2)}$, то

$$\|\Pi\| \leqslant \prod_{k=1}^{n}\prod_{d=1}^{N} C\exp\{ks_{qd}\kappa_1 t\} =$$

$$= C\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{d=1}^{N} ks_{qd}\kappa_1 t\right\} \leqslant C\exp\{(n+1)\kappa_1 t\}.$$

Из (45.29), из разложения F_i, из условия 26.2 и из неравенств для Π получаем

$$\|G_{i2}(t,\mu,\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^{n+1}g_{3n+1}(t), \tag{45.30}$$

где g_{3n+1} задается формулой (45.18).

Из (45.25), (45.28), (45.30) следует неравенство (45.23), справедливое при $(t, \mu, \varepsilon) \in D_{t\mu\varepsilon}(\mu_3)$. □

45.7. Функции $\Delta G_i \equiv G_i(u, t, \mu, \varepsilon) - G_i(\widetilde{u}, t, \mu, \varepsilon)$

Утверждение 45.4. *Найдутся такие значения δ, μ_4 и постоянные C, C°, что $\delta > 0$, $0 < \mu_4 \leqslant \mu_3$, $C^\circ \geqslant 0$ и при $i = \overline{1, m}$,*

$$\|u\| \leqslant \delta, \quad \|\widetilde{u}\| \leqslant \delta, \quad (t, \mu, \varepsilon) \in D_{t\mu\varepsilon}(\mu_4) \tag{45.31}$$

функции ΔG_i существуют, единственны, непрерывны по u, $\widetilde{u}$, t и удовлетворяют неравенству

$$\|\Delta G_i\| \leqslant \left[C\big(\|u\| + \|\widetilde{u}\|\big) + g_1(t)\mu + \sum_{k=1}^{n} g_{2k}(t)\varepsilon^k\right]\|u - \widetilde{u}\|. \tag{45.32}$$

Здесь $g_1(t)$, $g_{2k}(t)$ задаются формулами (45.3), (45.5).

Доказательство. Из (45.22) следуют формулы

$$\begin{aligned}
\Delta G_i &= F_i(u + Y, t, \varepsilon) - \\
&\qquad - F_i(\widetilde{u} + Y, t, \varepsilon) - F_{ix}\big(X_0(t, \mu), t, 0\big)\cdot(u - \widetilde{u}) = \\
&= \left[\int_0^1 F_{ix}\big(\theta u + (1-\theta)\widetilde{u} + Y, t, \varepsilon\big)\, d\theta - \right. \\
&\qquad \left. - F_{ix}\big(X_0(t, \mu), t, 0\big)\right]\cdot(u - \widetilde{u}) = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\theta_1} F_{ix}(\widetilde{Y}, t, \theta_1\varepsilon)\, d\theta_1\, d\theta(u - \widetilde{u}) = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \sum_{d=1}^{N} \frac{\partial^2 F_i(x, t, \mu)}{\partial x \partial x_d} \times \right. \\
&\qquad \times \left[\theta u_d + (1-\theta)\widetilde{u}_d + Y_d - X_{0d}(t, \mu)\right] + \\
&\qquad \left. + \frac{\partial^2 F_i(x, t, \lambda)}{\partial x \partial \lambda}\varepsilon \right\}_{x=\widetilde{Y}, \lambda=\theta_1\varepsilon} d\theta_1\, d\theta(u - \widetilde{u}),
\end{aligned} \tag{45.33}$$

$$Y \equiv \widetilde{Z}_n(t, \mu, \varepsilon) + x^\circ(\varepsilon) - \left[x^\circ(\varepsilon)\right]^{(\leqslant n)},$$

$$\widetilde{Y} \equiv \theta_1\theta u + \theta_1(1-\theta)\widetilde{u} + \theta_1 Y + (1-\theta_1)X_0(t, \mu).$$

Так как $z^{(0)}(t, \mu) \in \overline{D}_{x1}$ по утверждению 45.1, то отсюда, из (45.27) и из условий 26.2, 26.3 следует существование, единственность и непрерывность по u, $\widetilde{u}$, t функции ΔG на множестве $\|u\| \leqslant \delta_1$, $\|\widetilde{u}\| \leqslant \delta_1$, $(t, \mu, \varepsilon) \in D_{t\mu\varepsilon}(\mu_{41})$ для некоторых значений $\delta_1 > 0$, μ_{41}, $0 < \mu_{41} \leqslant \mu_3$.

Оценим ΔG. Из (45.2), (45.27), (45.33) следуют неравенства на множестве $D_{t\mu\varepsilon}(\mu_{41})$:

$$\|Y - X_0(t,\mu)\| \leqslant \left\|z^{(0)}(t,\mu) - X_0(t,\mu)\right\| + \left\|\widetilde{Z}_n(t,\mu,\varepsilon) - z^{(0)}(t,\mu)\right\| +$$

$$+\left\|x^\circ(\varepsilon) - \left[x^\circ(\varepsilon)\right]^{(\leqslant n)}\right\| \leqslant g_1(t)\mu + \sum_{k=1}^{n} g_{2k}(t)\varepsilon^k + C\varepsilon^{n+1} \leqslant C\mu^\lambda + C\varepsilon^\lambda,$$

$$\begin{aligned} \|\widetilde{Y} - X_0(t,\mu)\| &\leqslant \|u\| + \|\widetilde{u}\| + \|Y - X_0(t,\mu)\| \leqslant \\ &\leqslant \|u\| + \|\widetilde{u}\| + C\mu^\lambda + C\varepsilon^\lambda, \end{aligned} \tag{45.34}$$

$$\lambda \equiv \begin{cases} 1 & \text{для теорем 43.5,43.6,} \\ 1/2 & \text{для теоремы 43.7,} \\ (n+2)^{-1} & \text{для теоремы 43.8.} \end{cases}$$

Отсюда, из (45.33) и из условия 26.2 следует: найдутся такие значения $\delta > 0$, μ_4, что $0 < \delta \leqslant \delta_1$, $0 < \mu_4 \leqslant \mu_{41}$ и на множестве (45.31) $\widetilde{Y} \in D_x$,

$$\|\Delta G_i\| \leqslant \left[C\big(\|u\| + \|\widetilde{u}\|\big) + C\|Y - X_0(t,\mu)\| + C\varepsilon\right] \cdot \|u - \widetilde{u}\|.$$

Отсюда и из (45.34) следует (45.32). □

45.8. Окончание доказательства теорем 43.5–43.8 при $n \geqslant 1$

Рассмотрим задачу (45.21) при $\mu = \varepsilon$:

$$\mu^{K_i}\frac{du_i}{dt} = B_i(t,\mu)u + G_i(u,t,\mu,\mu), \quad u_i\big|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{45.35}$$

Из утверждений 45.3, 45.4, из формулы (45.22) для B_i следует, что задача (45.35) определена на множестве $\|u\| \leqslant \delta$, $(t,\mu) \in D_{t\mu}(\mu_4)$. При этом функции G_i непрерывны и удовлетворяют неравенствам

$$\|G_i(0,t,\mu,\mu)\| \leqslant \mu^{n+1} g_{3n+1}(t),$$

$$\|G_i(u,t,\mu,\mu) - G_i(\widetilde{u},t,\mu,\mu)\| \leqslant \left[C\big(\|u\| + \|\widetilde{u}\|\big) + g_4(t,\mu)\right] \cdot \|u - \widetilde{u}\|,$$

$$g_{3n+1}(t) = \begin{cases} C & \text{для теорем 43.5, 43.6,} \\ C^\circ t^{2n(\kappa_1+1)} + C & \text{для теоремы 43.7,} \\ C\exp\{(n+1)\kappa_1 t\} & \text{для теоремы 43.8,} \end{cases} \tag{45.36}$$

$$g_4(t,\mu) \equiv \begin{cases} C\mu & \text{для теорем 43.5, 43.6,} \\ C\mu + \sum\limits_{k=1}^{n} Ct^{(\kappa_1+1)(2k-1)}\mu^k & \text{для теоремы 43.7,} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} C\exp\{k\kappa_1 t\}\mu^k & \text{для теоремы 43.8.} \end{cases}$$

Таким образом, задача (45.35) аналогична задаче (36.2): функции $B_i(t,\mu)$ в обеих задачах совпадают, оценки (45.36) совпадают с оценками (38.1),

если в (38.1) положить $\widetilde{C}_{2ij} = 0, i = \overline{1, m-1}, j = \overline{i+1, m}$. Поэтому применение теоремы 28.5 к задаче (45.35) совпадает с применением теоремы 28.5 к задаче (36.2) (§ 39, § 40 нужно повторить для задачи (45.35)). Результат получим аналогичный: найдется такая постоянная μ_*, что $0 < \mu_* \leqslant \mu_4$ и на множестве $D_{t\mu}(\mu_*)$ функция $u(t, \mu, \mu)$ существует, единственна и удовлетворяет неравенству

$$\|u(t, \mu, \mu)\| \leqslant \mu^{n+1} g_5(t),$$

$$g_5(t, \mu) \equiv \begin{cases} C & \text{для теорем 43.5, 43.6,} \\ C^\circ t^{(\kappa_1+1)(2n+1)} + C & \text{для теоремы 43.7,} \\ C \exp\{(n+1)\kappa_1 t\} & \text{для теоремы 43.8.} \end{cases} \tag{45.37}$$

Отсюда, из (45.20), (45.26) получаем соотношения на множестве $D_{t\mu}(\mu_*)$:

$$x(t, \mu) = z(t, \mu, \mu) = u(t, \mu, \mu) + \widetilde{Z}_n(t, \mu, \mu) + x^\circ(\mu) - \left[x^\circ(\mu)\right]^{(\leqslant n)},$$

$$\|x - Z_n(t, \mu)\| = \|x - \widetilde{Z}_n(t, \mu, \mu)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|u(t, \mu, \mu)\| + \left\|x^\circ(\mu) - \left[x^\circ(\mu)\right]^{(\leqslant n)}\right\| \leqslant \mu^{n+1} g_5(t).$$

Теоремы 43.5–43.8 доказаны.

§ 46. Доказательство теоремы 43.9

46.1. Существование значений δ, μ_*

При выполнении условий теоремы 43.9 справедлива и теорема 43.1. Поэтому найдется значение $\mu_1 > 0$, не зависящее от t, μ и такое, что $0 < \mu_1 \leqslant \bar{\mu}$ и при $(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu_1)$,

$$D_{t\mu}(\mu_1) \equiv \left\{(t, \mu) \colon 0 \leqslant t \leqslant T, 0 < \mu \leqslant \mu_1\right\},$$

функция $z^{(0)}(t, \mu)$ существует, единственна и ее значения принадлежат замкнутому подмножеству $\overline{D}_{z1} \subset D_z$. Доказательство дано в п. 44.2. Отсюда и из условий 43.1, 43.2 следует существование значений δ, μ_*, $0 < \mu_* \leqslant \mu_1$, удовлетворяющих условиям теоремы 43.9.

Чтобы упростить доказательство, примем $\delta = 1$, $\mu_* = 1$. Это не ограничивает общности, так как к этому случаю всегда можно перейти заменой u, μ на $u' \equiv u/\delta$, $\mu' \equiv \mu/\mu_*$.

46.2. Переменная u

Переменные u и z связаны формулой

$$u \equiv z - z^{(0)}(t, \mu) - x^\circ(\varepsilon) + x^\circ(0). \tag{46.1}$$

Из (42.1), (42.4) следует, что u — решение следующей задачи Коши:

$$\frac{du_i}{dt} = A_i(t, \mu)u + F_i''(u, t, \mu, \varepsilon), \quad u_i|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{46.2}$$

$$A_i(t,\mu) \equiv \mu^{-K_i} F_{iz}\big(z^{(0)}(t,\mu), t, 0\big),$$

$$F_i''(u,t,\mu,\varepsilon) \equiv \mu^{-K_i}\big[F_i'(u,t,\mu,\varepsilon) - F_{iz}(z^{(0)}(t,\mu),t,0)u\big],$$

где F_i' — функция (43.7). Обозначим $U(t,s,\mu)$ матрицу Коши системы

$$\frac{dr}{dt} = A(t,\mu)r, \quad A \equiv (A_1,\ldots,A_m). \tag{46.3}$$

Тогда задача (46.2) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t,\mu,\varepsilon) = \int_0^t U(t,s,\mu)\cdot F''\big(u(s,\mu,\varepsilon),s,\mu,\varepsilon\big)\,ds, \qquad F'' \equiv (F_1'',\ldots,F_m''). \tag{46.4}$$

Применяя метод двух параметров к задаче (46.2), построим ряд

$$u(t,\mu,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)}(t,\mu)\varepsilon^k. \tag{46.5}$$

Формулы для коэффициентов ряда следуют из (43.7), (46.1), (46.2), (46.4), (46.5):

$$u^{(0)}(t,\mu) = 0,$$

$$u^{(k)}(t,\mu) = \int_0^t U(t,s,\mu)\left[\Phi\left(\sum_{j=0}^{k-1} u^{(j)}(s,\mu)\varepsilon^j, s,\mu,\varepsilon\right)\right]^{(k)} ds, \tag{46.6}$$

$$k \geqslant 1, \quad \Phi \equiv \big(F_1', \mu^{-K_2}F_2', \ldots, \mu^{-K_m}F_m'\big),$$

так как

$$\left[F_i''\left(\sum_{j=0}^{k-1} u^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j, t,\mu,\varepsilon\right)\right]^{(k)} = \mu^{-K_i}\left[F_i'\left(\sum_{j=0}^{k-1} u^{(j)}(t,\mu)\varepsilon^j, t,\mu,\varepsilon\right)\right]^{(k)}.$$

46.3. Построение мажоранты ряда (46.5)

Функции (43.7) непрерывны по t и аналитичны по u, ε на множестве (43.6), где $\delta = \mu_* = 1$, $F_i'(0,t,\mu,0) = 0$. Поэтому найдется значение $C > 0$, не зависящее от u, t, μ, ε и такое, что

$$\Phi(u,t,\mu,\varepsilon) \ll \varphi(u,\mu,\varepsilon) \equiv \frac{CS(1+S)}{\mu^{K_m}(1-S)}(\arg u, \varepsilon), \qquad S \equiv u_1 + \ldots + u_N + \varepsilon, \quad (t,\mu) \in D_{t\mu}(\mu_*). \tag{46.7}$$

Будем предполагать, что постоянная C выбрана так, что выполняются неравенства

$$\|F_{u_d}'(0,t,\mu,0)\| = \|F_{z_d}(z^{(0)}(t,\mu),t,0)\| \leqslant C, \quad d = \overline{1,N}, \qquad (t,\mu) \in D_{t\mu}(\mu_*). \tag{46.8}$$

Рассмотрим задачу

$$\frac{dy_d}{dt} = \varphi(y, \mu, \varepsilon), \quad y|_{t=0} = 0, \quad d = \overline{1, N}. \tag{46.9}$$

Ее решение единственно и имеет вид

$$y_d = \frac{(1+\varepsilon)\left[1 - \varepsilon - \sqrt{(1+\varepsilon)^2 - 4\varepsilon \exp\left\{CNt\mu^{-K_m}\right\}}\,\right]}{N\left[1 + \varepsilon + \sqrt{(1+\varepsilon)^2 - 4\varepsilon \exp\left\{CNt\mu^{-K_m}\right\}}\,\right]}, \quad d = \overline{1, N}. \tag{46.10}$$

Функции (46.10) аналитичны по ε при

$$|\varepsilon| < \varepsilon_*(t, \mu) \equiv 2\exp\left\{CNt\mu^{-K_m}\right\} - 1 - 2\sqrt{\exp\left\{CNt\mu^{-K_m}\right\}\left[\exp\left\{CNt\mu^{-K_m}\right\} - 1\right]}. \tag{46.11}$$

Поэтому функция y представима в виде ряда

$$y(t, \mu, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(t, \mu)\varepsilon^k, \tag{46.12}$$

сходящегося к решению (46.10) на множестве

$$0 \leqslant t \leqslant T, \quad \mu > 0, \quad |\varepsilon| < \varepsilon_*(t, \mu). \tag{46.13}$$

Если ε принимает неотрицательные значения и $\mu \leqslant \mu_*$, то из формулы (46.11) для ε_* следует, что множество (46.13) можно описать неравенствами

$$\begin{gathered} 0 \leqslant t < t'_*(\mu, \varepsilon), \quad 0 < \mu \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varepsilon < 1, \\ t'_*(\mu, \varepsilon) \equiv \min\left[T, \frac{\mu^{K_m}}{CN} \ln \frac{(1+\varepsilon)^2}{4\varepsilon}\right] > 0. \end{gathered} \tag{46.14}$$

Таким образом, ряд (46.12) сходится на множестве (46.14) к единственному решению задачи (46.9). Чтобы написать формулы для коэффициентов ряда (46.12), представим задачу (46.9) в следующем виде:

$$\begin{gathered} \frac{dy_d}{dt} = C\mu^{-K_m} \sum_{\lambda=1}^{N} y_\lambda + \varphi_1(y, \mu, \varepsilon), \quad y|_{t=0} = 0, \quad d = \overline{1, N}, \\ \varphi_1(y, \mu, \varepsilon) = \varphi(y, \mu, \varepsilon) - C\mu^{-K_m} \sum_{\lambda=1}^{N} y_\lambda. \end{gathered} \tag{46.15}$$

Матрица Коши $V(t, s, \mu)$ системы

$$\frac{dr}{dt} = \widetilde{A}(\mu)r, \quad \widetilde{A} \equiv C\mu^{-K_m} I,$$

где I — матрица с элементами, равными 1, имеет вид

$$V(t, s, \mu) = E + \left[\exp\left\{CN\mu^{-K_m}(t-s)\right\} - 1\right]\frac{I}{N}.$$

Задача (46.15) эквивалентна интегральным уравнениям

$$y_d(t, \mu, \varepsilon) = \int\limits_0^t \sum_{\lambda=1}^N V_{d\lambda}(t, s, \mu)\cdot\varphi_1\big(y(s, \mu, \varepsilon), \mu, \varepsilon\big)\, ds, \quad d = \overline{1, N}. \tag{46.16}$$

Отсюда и из формул (46.7), (46.10), (46.15) следуют равенства

$$\begin{gathered} y^{(0)}(t, \mu) = 0, \quad d = \overline{1, N}, \quad k \geqslant 1, \\ y_d^{(k)}(t, \mu) = \int\limits_0^t \sum_{\lambda=1}^N V_{d\lambda}(t, s, \mu)\left[\varphi\left(\sum_{j=0}^{k-1} y^{(j)}(s, \mu)\varepsilon^j, \mu, \varepsilon\right)\right]^{(k)} ds, \end{gathered} \tag{46.17}$$

так как

$$\left[\varphi_1\left(\sum_{j=0}^{k-1} y^{(j)}(t, \mu)\varepsilon^j, \mu, \varepsilon\right)\right]^{(k)} = \left[\varphi\left(\sum_{j=0}^{k-1} y^{(j)}(t, \mu)\varepsilon^j, \mu, \varepsilon\right)\right]^{(k)}.$$

$y_d^{(k)}(t, \mu)$ — неотрицательные, монотонно возрастающие функции t.

46.4. Оценка матрицы U

Правые части уравнений (46.3) непрерывны по t при $(t, \mu) \in D_{t\mu}(\mu_*)$. Поэтому $U(t, s, \mu)$ существует, единственна, непрерывна по t, s при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$. Чтобы оценить элементы матрицы U, представим U, V в виде рядов [17]

$$U(t, s, \mu) = E + \int\limits_s^t A(s_1, \mu)\, ds_1 + \int\limits_s^t \int\limits_s^{s_1} A(s_1, \mu)A(s_2, \mu)\, ds_2\, ds_1 + \ldots,$$

$$V(t, s, \mu) = E + \int\limits_s^t \widetilde{A}(\mu)\, ds_1 + \int\limits_s^t \int\limits_s^{s_1} \widetilde{A}^2(\mu)\, ds_2\, ds_1 + \ldots.$$

Так как каждый элемент матрицы A меньше по модулю элемента матрицы $\widetilde{A}$ согласно неравенствам (46.8), то получаем, что

$$\begin{gathered} |U_{d\lambda}(t, s, \mu)| \leqslant V_{d\lambda}(t, s, \mu), \\ 1 \leqslant d \leqslant N, \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant N, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \quad 0 < \mu \leqslant \mu_*. \end{gathered} \tag{46.18}$$

46.5. Сходимость ряда (46.5)

Предположим, что функции $u^{(j)}(t,\mu)$ существуют, единственны, непрерывны по t и удовлетворяют неравенствам

$$|u_d^{(j)}(t,\mu)| \leqslant y_d^{(j)}(t,\mu) \tag{46.19}$$

при $j=\overline{0,k-1}$, $d=\overline{1,N}$, $k\geqslant 1$, $(t,\mu)\in D_{t\mu}(\mu_*)$. Тогда из формул (46.6) следует, что функция $u^{(k)}(t,\mu)$ существует, единственна и непрерывна на множестве $D_{t\mu}(\mu_*)$. Из (46.6), (46.7), (46.17)–(46.19) получим неравенства

$$\left|u_d^{(k)}(t,\mu)\right| \leqslant \int_0^t \sum_{\lambda=1}^N |U_{d\lambda}(t,s,\mu)|\cdot\left|\left[\Phi_\lambda\left(\sum_{j=0}^{k-1} u^{(j)}(s,\mu)\varepsilon^j, s,\mu,\varepsilon\right)\right]^{(k)}\right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \sum_{\lambda=1}^N V_{d\lambda}(t,s,\mu)\cdot\left[\varphi\left(\sum_{j=0}^{k-1} y^{(j)}(s,\mu)\varepsilon^j,\mu,\varepsilon\right)\right]^{(k)} ds = y_d^{(k)}(t,\mu),$$

$$d=\overline{1,N}.$$

Получили (46.19) для $j=k$. Так как $u^{(0)}(t,\mu)=y^{(0)}(t,\mu)=0$, то отсюда по индукции получаем: элементы ряда (46.5) определены и непрерывны по t на множестве $D_{t\mu}(\mu_*)$, ряд (46.12) мажорирует ряд (46.5). Поэтому ряд (46.5) сходится на множестве (46.14) и для любых значений t', μ, ε, $0<t'<t'_*(\mu,\varepsilon)$, $0<\mu\leqslant 1$, $0\leqslant\varepsilon<1$, ряд (46.5) сходится равномерно на отрезке $0\leqslant t\leqslant t'$. Отметим, что из (46.10), (46.19) следуют неравенства $|u_d(t,\mu)|\leqslant\delta=1$.

46.6. Окончание доказательства теоремы 43.9

Докажем, что сумма ряда (46.5) является решением задачи (46.2) на множестве (46.14). Для этого рассмотрим интегральные уравнения (46.4). Из аналитичности F_i' и из формул (46.2), (46.5) следует, что подынтегральные выражения в (46.4) разлагаются в ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(t,s,\mu)\varepsilon^k, \tag{46.20}$$

который удовлетворяет условиям почленного интегрирования: на отрезке $0\leqslant s\leqslant t$ члены ряда непрерывны по s и ряд сходится равномерно. Поэтому интеграл от суммы ряда (46.20) равен сумме интегралов от его членов. После интегрирования (46.20) получаем (46.5) по построению ряда (46.5) (смотрите формулы (46.6)). Это означает, что сумма ряда (46.5) является решением уравнений (46.4), а значит и решением задачи (46.2). Единственность решения задачи (46.2) следует из гладкости правых частей дифференциальных уравнений. Таким образом, на множестве (46.14)

ряд (46.5) сходится к решению (единственному) задачи (46.2), сходимость равномерная на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t'$ при любом t', $0 < t' < t'_*(\mu, \varepsilon)$.

Отсюда и из (46.1) получаем: 1) на множестве (46.14) ряд (42.2) сходится к решению (единственному) задачи (42.1), сходимость равномерная на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t'$ при любом t', $0 < t' < t'_*(\mu, \varepsilon)$; 2) на множестве $0 \leqslant t < t_*(\mu)$, $0 < \mu < \mu_* = 1$ ряд (42.3) сходится к единственному решению задачи (22.1), сходимость равномерная на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t'$ при любом t', $0 < t' < t_*(\mu)$. Здесь

$$t_*(\mu) \equiv t'_*(\mu, \mu) = \min\left\{T, \frac{\mu^{K_m}}{CN} \ln \frac{(1+\mu)^2}{4\mu}\right\} > 0.$$

Теорема 43.9 доказана.

§ 47. Примеры применения метода двух параметров

Пример 47.1. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = \mu x_2, && x_1|_{t=0} = 0, \\ &\mu\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + \mu e^t, && x_2|_{t=0} = 1. \end{aligned} \tag{47.1}$$

Для построения решения задачи (47.1) перейдем к задаче с двумя параметрами:

$$\begin{aligned} &\frac{dz_1}{dt} = \varepsilon z_2, && z_1|_{t=0} = 0, \\ &\mu\frac{dz_2}{dt} = -z_2 + \varepsilon e^t, && z_2|_{t=0} = 1. \end{aligned} \tag{47.2}$$

Подставим в уравнения (47.2) ряд (42.2), разложим левые и правые части уравнений в ряды по степеням ε и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях. Получим

$$\frac{dz_1^{(0)}}{dt} = 0, \qquad z_1^{(0)}(0,\mu) = 0;$$

$$\frac{dz_1^{(k)}}{dt} = z_2^{(k-1)}, \quad z_1^{(k)}(0,\mu) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots;$$

$$\mu\frac{dz_2^{(0)}}{dt} = -z_2^{(0)}, \qquad z_2^{(0)}(0,\mu) = 1;$$

$$\mu\frac{dz_2^{(1)}}{dt} = -z_2^{(1)} + e^t, \qquad z_2^{(1)}(0,\mu) = 0;$$

$$\mu\frac{dz_2^{(k)}}{dt} = -z_2^{(k)}, \quad z_2^{(k)}(0,\mu) = 0, \quad k = 2, 3, \ldots.$$

Решение этих уравнений единственно и имеет вид

$$z_1^{(k)} = 0, \quad k = 0, 3, 4, \ldots; \quad z_1^{(1)} = \mu(1 - e^{-\tau});$$

$$z_1^{(2)} = (1+\mu)^{-1}\left[e^t - 1 - \mu(1-e^{-\tau})\right]; \quad z_2^{(0)} = e^{-\tau};$$
$$z_2^{(1)} = (1+\mu)^{-1}(e^t - e^{-\tau}); \quad z_2^{(k)} = 0, \quad k = 2, 3, \ldots, \quad \tau = \frac{t}{\mu}.$$

Таким образом, асимптотический ряд (42.2) для задачи (47.2) содержит конечное число членов и дает точное решение

$$z_1 = \frac{1}{1+\mu}\left[\varepsilon^2(e^t - 1) + \varepsilon\mu(1+\mu-\varepsilon)(1-e^{-\tau})\right],$$
$$z_2 = \frac{1}{1+\mu}\left[\varepsilon e^t + (1+\mu-\varepsilon)e^{-\tau}\right], \quad \tau = \frac{t}{\mu}.$$

Отсюда следует, что ряд (42.3) для задачи (47.1) содержит конечное число членов и дает точное решение при $t \geqslant 0$, $\mu > 0$:

$$x_1 = \frac{\mu^2}{1+\mu}\left(e^t - e^{-\tau}\right), \quad x_2 = \frac{1}{1+\mu}\left(\mu e^t + e^{-\tau}\right), \quad \tau = \frac{t}{\mu}. \tag{47.3}$$

Асимптотическое решение задачи (47.1), построенное методом пограничных функций, имеет вид

$$x_1 \sim \sum_{k=2}^{\infty}(e^t - e^{-\tau})(-\mu)^k, \quad x_2 \sim e^{-\tau} - \sum_{k=1}^{\infty}(e^t - e^{-\tau})(-\mu)^k.$$

Эти ряды сходятся к решению (47.3) при $t \geqslant 0$, $0 < \mu < 1$.

Из приведенного примера следует, что метод пограничных функций и метод двух параметров дают, вообще говоря, разные асимптотические решения задачи Тихонова.

Нетрудно проверить, что задача (47.1) удовлетворяет условиям теорем 28.1, 30.1, 43.1, 43.5.

Пример 47.2. Рассмотрим задачу

$$\frac{dx_1}{dt} = h(\mu), \qquad x_1|_{t=0} = 0,$$
$$\mu\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + \mu x_2^2, \qquad x_2|_{t=0} = 1, \tag{47.4}$$
$$h(\mu) \equiv \begin{cases} \exp\{-\mu^2\} & \text{при} \quad \mu \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad \mu = 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что задача (47.4) удовлетворяет условиям теоремы 43.5 (при $\kappa_2 = C_2 = 1$ и любых n, $\bar{\mu}$, T) и теоремы 43.7 (при $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = C_1 = C_2 = 1$, $C_1^\circ = 0$ и любых n, $\bar{\mu}$).

Из теоремы 43.5 следует: для любых значений $T > 0$, $n \geqslant 0$ найдутся $\mu_* > 0$, C_*, не зависящие от t, μ и такие, что решение задачи (47.4) существует, единственно и удовлетворяет неравенству $\| x(t,\mu) - Z_n(t,\mu) \| \leqslant C_*\mu^{n+1}$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Из теоремы 43.7 следует: для любых значений $T > 0$, $\chi (0 \leqslant \chi < 1/2)$, $n \geqslant 0$ найдутся $\mu_* > 0$, C_*, $C_*^\circ \geqslant 0$, не зависящие от t, μ и такие, что решение задачи (47.4) существует, единственно и удовлетворяет неравенству $\| x(t,\mu) - Z_n(t,\mu) \| \leqslant \mu^{n+1}(C_*^\circ t^{2n+1} + C_*)$ при $0 \leqslant t \leqslant T\mu^{-\chi}$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Асимптотическое решение задачи (47.4), построенное методом двух параметров, имеет вид

$$
\begin{gathered}
x(t,\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\tau}\left(1-e^{-\tau}\right)^k \mu^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
Z_n(t,\mu) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\tau}\left(1-e^{-\tau}\right)^k \mu^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \frac{t}{\mu}.
\end{gathered} \tag{47.5}
$$

При построении ряда использовалось равенство $d^k h(0)/d\varepsilon^k = 0, k \geqslant 0$. Решение задачи (47.4) существует при $t \geqslant 0$, $\mu > 0$. Оно имеет вид

$$
x_1 = h(\mu)t, \quad x_2 = \left[\mu + (1-\mu)e^{\tau}\right]^{-1}.
$$

Отсюда и из (47.5) получим формулы для остаточного члена асимптотики:

$$
\begin{gathered}
x_1(t,\mu) - Z_{n1}(t,\mu) = h(\mu)t, \\
x_2(t,\mu) - Z_{n2}(t,\mu) = \frac{(1-e^{-\tau})^{n+1}\mu^{n+1}}{\mu + (1-\mu)e^{\tau}}, \quad Z_n = (Z_{n1}; Z_{n2}).
\end{gathered}
$$

Отсюда нетрудно получить, что при $t \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant \mu_* < 1$ справедливо, следующее неравенство:

$$
\begin{gathered}
\| x(t,\mu) - Z_n(t,\mu) \| \leqslant \mu^{n+1}(C_*^\circ t + C_*), \\
C_*^\circ = \left(\frac{n+1}{2e}\right)^{(n+1)/2}, \quad C_* = \frac{1}{1-\mu_*}.
\end{gathered}
$$

Отметим, что условие 43.1 для задачи (47.4) не выполняется, так как $h(\mu)$ — не аналитическая функция. Поэтому теоремы 43.1–43.4 не применимы к задаче (47.4). Асимптотический ряд (47.5) сходится к функции

$$
x_*(t,\mu) \equiv \frac{1}{\mu + (1-\mu)e^{\tau}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},
$$

которая не является решением задачи (47.4) при $\mu > 0$.

Замечание 47.1. В примерах 31.1–31.5, 31.10 правые части дифференциальных уравнений и начальные значения переменных не зависят от малого параметра. Поэтому метод двух параметров к ним не применим. В примерах 31.7–31.9 метод двух параметров дает такое же асимптотическое решение, что и метод пограничных функций.

Для примеров в § 31 справедливы следующие теоремы о методе двух параметров:

пример 31.6 — теоремы 43.1, 43.5;
пример 31.7 — теоремы 43.1, 43.2, 43.5, 43.6;
пример 31.8 — теоремы 43.1, 43.3, 43.5, 43.7;
пример 31.9 — теоремы 43.1, 43.4, 43.5, 43.8.

Пример 31.11 удовлетворяет условиям теорем 43.1, 43.3, 43.5, 43.7, если вместо x_1 ввести новую переменную $\Delta x_1 \equiv x_1 - x_1^\circ$.

§ 48. Выводы главы 5

В главе 5 задача Тихонова решается *методом двух параметров*. Метод двух параметров описан в § 42. В § 43 сформулированы теоремы о том, что ряд, построенный методом двух параметров, сходится к решению задачи или является асимптотикой решения на отрезке (теоремы 43.1, 43.5), на полуоси (теоремы 43.2, 43.6), на асимптотически больших интервалах времени (теоремы 43.3, 43.4, 43.7, 43.8). Кроме того, в § 43 сформулирована теорема 43.9 о сходимости ряда, построенного методом двух параметров, к решению при фиксированном значении малого параметра на ненулевом интервале времени.

Доказательство теорем 43.1–43.9 дано в § 44–§ 46. В § 47 приводятся простые примеры применения метода двух параметров.

Глава 6

Движение гироскопа в кардановом подвесе

§ 49. Приведение к сингулярно возмущенной задаче Коши

Уравнения движения астатического гироскопа в кардановом подвесе при наличии сил вязкого трения в осях подвеса имеют вид [36]

$$
\begin{gathered}
\left[A_2 + (A + A_1)\cos^2\beta + C_1 \sin^2\beta\right] \frac{d^2\alpha}{d\mathrm{T}^2} + \\
+ (C_1 - A - A_1)\sin(2\beta)\frac{d\alpha}{d\mathrm{T}}\frac{d\beta}{d\mathrm{T}} + H\cos\beta\frac{d\beta}{d\mathrm{T}} + n_1\frac{d\alpha}{d\mathrm{T}} = 0, \\
(A + B_1)\frac{d^2\beta}{d\mathrm{T}^2} - \frac{1}{2}(C_1 - A - A_1)\sin(2\beta)\left(\frac{d\alpha}{d\mathrm{T}}\right)^2 - \\
- H\cos\beta\frac{d\alpha}{d\mathrm{T}} + n_2\frac{d\beta}{d\mathrm{T}} = 0.
\end{gathered}
\tag{49.1}
$$

Здесь α, β — углы поворота внешнего и внутреннего колец карданова подвеса; A_2 — момент инерции внешнего кольца относительно оси вращения; A_1, B_1, C_1 — главные моменты инерции внутреннего кольца; A — экваториальный момент инерции ротора; H — кинетический момент ротора; n_1, n_2 — коэффициенты моментов сил вязкого трения, действующих по осям колец подвеса; T — время.

Рассмотрим движение гироскопа при следующих численных значениях (параметры гироскопа, исключая n_1, n_2, взяты из [21]):

$$
\begin{gathered}
A + A_1 + A_2 = 12{,}7\text{г}\cdot\text{см}\cdot\text{с}^2, \quad A + B_1 = 4{,}2\text{г}\cdot\text{см}\cdot\text{с}^2, \\
C_1 = A + A_1, \quad H = 10^4\text{г}\cdot\text{см}\cdot\text{с}, \quad n_1 = n_2 = 5\cdot 10^3\text{г}\cdot\text{см}\cdot\text{с}, \\
\beta|_{\mathrm{T}=0} \equiv \beta^\circ = 30^\circ, \quad \left.\frac{d\alpha}{d\mathrm{T}}\right|_{\mathrm{T}=0} \equiv \Omega^\circ_\alpha = 0{,}2\text{с}^{-1}, \quad \left.\frac{d\beta}{d\mathrm{T}}\right|_{\mathrm{T}=0} = 0.
\end{gathered}
\tag{49.2}
$$

Чтобы привести (49.1), (49.2) к задаче с малым параметром, перейдем к безразмерным переменным согласно процедуре нормализации в [37]:

$$
\begin{gathered}
\xi_1 = \frac{\alpha - \alpha^\circ}{\alpha_*}, \qquad \xi_2 = \frac{\beta - \beta^\circ}{\beta_*}, \\
\xi_3 = \frac{1}{\Omega_{\alpha*}}\frac{d\alpha}{d\mathrm{T}}, \qquad \xi_4 = \frac{1}{\Omega_{\beta*}}\frac{d\beta}{d\mathrm{T}}, \quad t = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_*}.
\end{gathered}
\tag{49.3}
$$

Здесь α_*, β_*, $\Omega_{\alpha*}$, $\Omega_{\beta*}$, T_* — характерные значения углов, угловых скоростей, времени. Запишем задачу (49.1), (49.2) в форме Коши и в новых переменных:

$$\frac{d\xi_1}{dt}=\frac{\Omega_{\alpha*}\mathsf{T}_*}{\alpha_*}\xi_3,\quad \frac{d\xi_2}{dt}=\frac{\Omega_{\beta*}\mathsf{T}_*}{\beta_*}\xi_4,$$
$$\frac{d\xi_3}{dt}=-\frac{n_1\mathsf{T}_*}{A+A_1+A_2}\xi_3-\frac{H\Omega_{\beta*}\mathsf{T}_*}{(A+A_1+A_2)\Omega_{\alpha*}}\cos(\beta^\circ+\beta_*\xi_2)\xi_4,$$
$$\frac{d\xi_4}{dt}=\frac{H\Omega_{\alpha*}\mathsf{T}_*}{(A+B_1)\Omega_{\beta*}}\cos(\beta^\circ+\beta_*\xi_2)\xi_3-\frac{n_2\mathsf{T}_*}{A+B_1}\xi_4, \tag{49.4}$$
$$\xi_i\,|_{t=0}=0,\quad i=1,2,4,\quad \xi_3\,|_{t=0}=\frac{\Omega_\alpha^\circ}{\Omega_{\alpha*}}.$$

Примем за малый параметр и характерные значения следующие выражения:

$$\mu=\sqrt{\frac{(A+A_1+A_2)\Omega_\alpha^\circ}{H}}\approx 0{,}016,\quad \mathsf{T}_*=\sqrt{\frac{A+B_1}{H\Omega_\alpha^\circ}}\approx 0{,}046\text{c},$$

$$\alpha_*=\Omega_{\alpha*}\mathsf{T}_*\approx 0{,}009,\quad \beta_*=\mu,\quad \Omega_{\alpha*}=\Omega_\alpha^\circ,\quad \Omega_{\beta*}=\frac{\beta_*}{\mathsf{T}_*}\approx 0{,}348\text{c}^{-1}.$$

Введем параметры

$$a_1=\frac{n_1}{H}\sqrt{\frac{A+B_1}{A+A_1+A_2}}\approx 0{,}288,\quad a_2=\frac{n_2}{H}\sqrt{\frac{A+A_1+A_2}{A+B_1}}\approx 0{,}869.$$

После вычисления постоянных задача (49.4) принимает вид

$$\frac{d\xi_1}{dt}=\xi_3,\quad \frac{d\xi_2}{dt}=\xi_4,$$
$$\mu\frac{d\xi_3}{dt}=-a_1\xi_3-\cos(\beta^\circ+\mu\xi_2)\xi_4,\quad \mu\frac{d\xi_4}{dt}=\cos(\beta^\circ+\mu\xi_2)\xi_3-a_2\xi_4, \tag{49.5}$$
$$\xi_i\,|_{t=0}=0,\quad i=1,2,4,\quad \xi_3\,|_{t=0}=1.$$

Если обозначить $x_1=(\xi_1,\xi_2)$, $x_2=(\xi_3,\xi_4)$, то получим стандартную форму сингулярно возмущенной задачи Коши

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \mu\frac{dx_2}{dt}=F_2(x,\mu),\quad x_1\,|_{t=0}=0,\quad x_2\,|_{t=0}=x_2^\circ,$$

где

$$F_2=(F_{21},F_{22}),\quad F_{21}(x,\mu)=-a_1x_{21}-\cos(\beta^\circ+\mu x_{12})x_{22},$$
$$F_{22}(x,\mu)=\cos(\beta^\circ+\mu x_{12})x_{21}-a_2x_{22},\quad x_2^\circ=(1,0).$$

Замечание 49.1. На странице 128 дан рисунок гироскопа в кардановом подвесе.

Замечание 49.2. Вырожденная для (49.5) задача соответствует прецессионной модели движения гироскопа в кардановом подвесе [36]. Вырожденная задача описывается уравнениями

$$\frac{d\bar{\xi}_i}{dt} = \bar{\xi}_{i+2}, \quad \bar{\xi}_i\,|_{t=0} = 0, \quad i = 1, 2,$$
$$0 = -a_1\bar{\xi}_3 - \cos\beta^\circ \cdot \bar{\xi}_4, \quad 0 = \cos\beta^\circ \cdot \bar{\xi}_3 - a_2\bar{\xi}_4, \tag{49.6}$$

которые имеют нулевое решение: $\bar{\xi}_i = 0$, $i = \overline{1,4}$. В размерных переменных решение прецессионной модели имеет вид

$$\bar{\alpha} = \alpha^\circ, \quad \bar{\beta} = \beta^\circ, \quad \overline{\frac{d\alpha}{d\mathrm{T}}} = 0, \quad \overline{\frac{d\beta}{d\mathrm{T}}} = 0. \tag{49.7}$$

По теореме Тихонова 30.1, которой удовлетворяет задача (49.5), для любого значения $T > 0$ найдется μ_*, не зависящая от t, μ и такая, что решение задачи (49.5) существует и единственно при $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$,

$$\lim_{\mu\to 0+0} \xi_i(t,\mu) = \bar{\xi}_i, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad i = 1, 2,$$
$$\lim_{\mu\to 0+0} \xi_j(t,\mu) = \bar{\xi}_j, \qquad 0 < t \leqslant T, \qquad j = 3, 4.$$

Уменьшение μ до нуля для каждого конкретного гироскопа происходит при стремлении к нулю величины Ω_α°/H. Здесь значение малого параметра фиксировано: $\mu \approx 0{,}016$. Отклонение точного решения задачи (49.1), (49.2) от решения прецессионной модели можно получить с помощью результатов (49.7), (51.17), (55.6). На оси $\mathrm{T} \geqslant 0$ имеем:

$$\begin{aligned}
|\alpha - \bar{\alpha}| &\leqslant |\alpha - \widetilde{\alpha}| + |\widetilde{\alpha} - \bar{\alpha}| = \\
&= |\alpha - \widetilde{\alpha}| + \left|\exp\{-\Delta\mathrm{T}\} \cdot \left[\widetilde{D}_3 \cos(\widetilde{\Omega}\mathrm{T}) + \widetilde{D}_4 \sin(\widetilde{\Omega}\mathrm{T})\right] - \widetilde{D}_3\right| \leqslant \\
&\leqslant (2{,}57 + 8{,}92e^{-\Delta\mathrm{T}}) \cdot 10^{-8} + \\
&\quad + e^{-\Delta\mathrm{T}}\sqrt{\widetilde{D}_3^2 + \widetilde{D}_4^2} + |\widetilde{D}_3| \leqslant 26{,}21'' + 33{,}02'' e^{-\Delta\mathrm{T}} \leqslant 59{,}23''.
\end{aligned}$$

Здесь $\widetilde{\alpha}$, Δ, $\widetilde{\Omega}$, $\widetilde{D}_3$, $\widetilde{D}_4$ — функции и постоянные из (51.17). Неравенства для других переменных получаются аналогично.

Результаты 49.1. Движение гироскопа в кардановом подвесе описывается в безразмерных переменных уравнениями (49.5). Приближенная (прецессионная) модель движения гироскопа описывается уравнениями (49.6). При $\mathrm{T} \geqslant 0$ справедливы следующие оценки для разности между точным решением задачи о движении гироскопа и решением прецессионной модели движения гироскопа:

$$|\alpha - \bar{\alpha}| \leqslant 26{,}206'' + 33{,}011'' e^{-\Delta\mathrm{T}} \leqslant 59{,}22'',$$
$$|\beta - \bar{\beta}| \leqslant 45{,}381'' + 55{,}653'' e^{-\Delta\mathrm{T}} \leqslant 101{,}04'',$$

$$\left|\frac{d\alpha}{d\mathrm{T}} - \overline{\frac{d\alpha}{d\mathrm{T}}}\right| \leqslant (5\cdot 10^{-9}e^{-\Delta_0\mathrm{T}} + 0{,}2125e^{-\Delta\mathrm{T}})\text{с}^{-1} \leqslant 0{,}213\text{с}^{-1},$$

$$\left|\frac{d\beta}{d\mathrm{T}} - \overline{\frac{d\beta}{d\mathrm{T}}}\right| \leqslant (9\cdot 10^{-9}e^{-\Delta_0\mathrm{T}} + 0{,}3694e^{-\Delta\mathrm{T}})\text{с}^{-1} \leqslant 0{,}370\text{с}^{-1}.$$

Здесь Δ, Δ_0 — постоянные (51.17), (55.7). О прецессионной модели движения гироскопа смотрите в замечании 30.4.

§ 50. Применение метода пограничных функций

50.1. Построение асимптотики

Построим приближенное решение задачи (49.5) методом пограничных функций. В соответствии с §23 решение строится в виде суммы двух рядов ($m = 2$). Положим

$$\xi_i(t,\mu) = \eta_{1i}(t,\mu) + \eta_{2i}(\tau,\mu), \quad \tau = \frac{t}{\mu}, \quad i = \overline{1,4}. \tag{50.1}$$

Уравнения для η_{ji} примут вид (смотрите (23.3), (49.5))

$$\begin{gathered}
\frac{d\eta_{11}}{dt} = \eta_{13}, \quad \frac{d\eta_{12}}{dt} = \eta_{14},\\
\mu\frac{d\eta_{13}}{dt} = -a_1\eta_{13} - \cos(\beta^\circ + \mu\eta_{12})\eta_{14},\\
\mu\frac{d\eta_{14}}{dt} = \cos(\beta^\circ + \mu\eta_{12})\eta_{13} - a_2\eta_{14},\\
\frac{d\eta_{21}}{d\tau} = \mu\eta_{23}, \quad \frac{d\eta_{22}}{d\tau} = \mu\eta_{24},\\
\frac{d\eta_{23}}{d\tau} = -a_1\eta_{23} - \cos(\beta^\circ + \mu\eta_{12} + \mu\eta_{22})(\eta_{14} + \eta_{24}) + \cos(\beta^\circ + \mu\eta_{12})\eta_{14},\\
\frac{d\eta_{24}}{d\tau} = \cos(\beta^\circ + \mu\eta_{12} + \mu\eta_{22})(\eta_{13} + \eta_{23}) - \cos(\beta^\circ + \mu\eta_{12})\eta_{13} - a_2\eta_{24},\\
\lim_{\tau\to\infty}\eta_{2i}(\tau,\mu) = 0, \quad i = 1,2,\\
\eta_{1j}(0,\mu) + \eta_{2j}(0,\mu) = 0, \quad j = 1,2,4, \quad \eta_{13}(0,\mu) + \eta_{23}(0,\mu) = 1.
\end{gathered} \tag{50.2}$$

Функции η_{ji} ищем в виде

$$\begin{aligned}
\eta_{1i} &= \eta_{1i}^{(0)}(t) + \mu\eta_{1i}^{(1)}(t) + \ldots,\\
\eta_{2i} &= \eta_{2i}^{(0)}(\tau) + \mu\eta_{2i}^{(1)}(\tau) + \ldots .
\end{aligned} \tag{50.3}$$

Подставим ряды (50.3) в уравнения (50.2), разложим левые и правые части уравнений в ряды по степеням μ, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ. Получим следующие уравнения для функций $\eta_{ji}^{(k)}$:

$\boxed{k=0}$

$$\frac{d\eta_{11}^{(0)}}{dt}=\eta_{13}^{(0)},\quad \frac{d\eta_{12}^{(0)}}{dt}=\eta_{14}^{(0)},$$

$$0=-a_1\eta_{13}^{(0)}-\cos\beta^\circ\eta_{14}^{(0)},\quad 0=\cos\beta^\circ\eta_{13}^{(0)}-a_2\eta_{14}^{(0)},$$

$$\frac{d\eta_{21}^{(0)}}{d\tau}=0,\quad \frac{d\eta_{22}^{(0)}}{d\tau}=0,$$

$$\frac{d\eta_{23}^{(0)}}{d\tau}=-a_1\eta_{23}^{(0)}-\cos\beta^\circ\eta_{24}^{(0)},\quad \frac{d\eta_{24}^{(0)}}{d\tau}=\cos\beta^\circ\eta_{23}^{(0)}-a_2\eta_{24}^{(0)},$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\eta_{2i}^{(0)}(\tau)=0,\quad i=1,2,$$

$$\eta_{1j}^{(0)}(0)+\eta_{2j}^{(0)}(0)=0,\quad j=1,2,4,\quad \eta_{13}^{(0)}(0)+\eta_{23}^{(0)}(0)=1;$$

$\boxed{k=1}$

$$\frac{d\eta_{11}^{(1)}}{dt}=\eta_{13}^{(1)},\quad \frac{d\eta_{12}^{(1)}}{dt}=\eta_{14}^{(1)},$$

$$\frac{d\eta_{13}^{(0)}}{dt}=-a_1\eta_{13}^{(1)}-\cos\beta^\circ\eta_{14}^{(1)}+\sin\beta^\circ\eta_{12}^{(0)}\eta_{14}^{(0)},$$

$$\frac{d\eta_{14}^{(0)}}{dt}=\cos\beta^\circ\eta_{13}^{(1)}-a_2\eta_{14}^{(1)}-\sin\beta^\circ\eta_{12}^{(0)}\eta_{13}^{(0)},$$

$$\frac{d\eta_{21}^{(1)}}{d\tau}=\eta_{23}^{(0)},\quad \frac{d\eta_{22}^{(1)}}{d\tau}=\eta_{24}^{(0)},$$

$$\frac{d\eta_{23}^{(1)}}{d\tau}=-a_1\eta_{23}^{(1)}-\cos\beta^\circ\eta_{24}^{(1)}+\sin\beta^\circ\left[\eta_{12}^{(0)}(0)\eta_{24}^{(0)}+\eta_{14}^{(0)}(0)\eta_{22}^{(0)}+\eta_{22}^{(0)}\eta_{24}^{(0)}\right],$$

$$\frac{d\eta_{24}^{(1)}}{d\tau}=\cos\beta^\circ\eta_{23}^{(1)}-a_2\eta_{24}^{(1)}-\sin\beta^\circ\left[\eta_{12}^{(0)}(0)\eta_{23}^{(0)}+\eta_{13}^{(0)}(0)\eta_{22}^{(0)}+\eta_{22}^{(0)}\eta_{23}^{(0)}\right],$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\eta_{2i}^{(1)}(\tau)=0,\quad \eta_{1j}^{(1)}(0)+\eta_{2j}^{(1)}(0)=0,\quad i=1,2;\quad j=\overline{1,4}.$$

Решение уравнений имеет вид

$$\begin{gathered}\eta_{1i}^{(0)}=0,\quad i=\overline{1,4};\quad \eta_{2i}^{(0)}=0,\quad i=1,2;\\ \eta_{23}^{(0)}=e^{-\delta\tau}(\cos\omega\tau+b_1\sin\omega\tau),\quad \eta_{24}^{(0)}=b_2e^{-\delta\tau}\sin\omega\tau,\\ \eta_{11}^{(1)}=-b_3,\quad \eta_{12}^{(1)}=-b_5,\quad \eta_{1i}^{(1)}=0,\quad i=3,4;\\ \eta_{21}^{(1)}=e^{-\delta\tau}(b_3\cos\omega\tau+b_4\sin\omega\tau),\quad \eta_{22}^{(1)}=e^{-\delta\tau}(b_5\cos\omega\tau+b_6\sin\omega\tau),\\ \eta_{2i}^{(1)}=0,\quad i=3,4.\end{gathered}\tag{50.4}$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
\delta=\frac{a_1+a_2}{2}\approx 0{,}578,\quad \omega=\sqrt{\cos^2\beta^\circ-\frac{(a_1-a_2)^2}{4}}\approx 0{,}816,\\
b_1=\frac{a_2-a_1}{2\omega}\approx 0{,}357,\qquad b_2=\frac{\cos\beta^\circ}{\omega}\approx 1{,}062,\\
b_3=-\frac{\delta+\omega b_1}{\delta^2+\omega^2}\approx -0{,}869,\qquad b_4=\frac{\omega-\delta b_1}{\delta^2+\omega^2}\approx 0{,}609,\\
b_5=-\frac{\omega b_2}{\delta^2+\omega^2}\approx -0{,}866,\qquad b_6=-\frac{\delta b_2}{\delta^2+\omega^2}\approx -0{,}614.
\end{gathered}
\tag{50.5}
$$

Из (50.1), (50.3), (50.4) следует, что нулевое приближение решения задачи (49.5) имеет вид

$$
\begin{gathered}
X_0(t,\mu)=(\xi_{01},\xi_{02},\xi_{03},\xi_{04}),\\
\xi_{01}=0,\quad \xi_{02}=0,\quad \xi_{03}=e^{-\delta\tau}(\cos\omega\tau+b_1\sin\omega\tau),\\
\xi_{04}=b_2e^{-\delta\tau}\sin\omega\tau,\quad \tau=\frac{t}{\mu}.
\end{gathered}
\tag{50.6}
$$

Первое приближение решения задачи (49.5) имеет вид

$$
\begin{gathered}
X_1(t,\mu)=(\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\xi_{14}),\\
\xi_{11}=\mu e^{-\delta\tau}(b_3\cos\omega\tau+b_4\sin\omega\tau)-b_3\mu,\\
\xi_{12}=\mu e^{-\delta\tau}(b_5\cos\omega\tau+b_6\sin\omega\tau)-b_5\mu,\\
\xi_{13}=e^{-\delta\tau}(\cos\omega\tau+b_1\sin\omega\tau),\quad \xi_{14}=b_2e^{-\delta\tau}\sin\omega\tau,\quad \tau=\frac{t}{\mu}.
\end{gathered}
\tag{50.7}
$$

Замечание 50.1. Функция $\eta_2(\tau,\mu)$ является пограничной функцией. Она вносит существенный вклад в асимптотическое разложение решения задачи на интервале времени порядка μ. Функция $\eta_1(t,\mu)$ является основным членом асимптотики на всем интервале времени за исключением пограничного слоя, примыкающего к точке $t=0$ и стремящегося к нулю при $\mu\to 0$. Отсюда следует, что слагаемые $\eta_{1i}^{(k)}$, $\eta_{2i}^{(k)}$ отвечают прецессионным и нутационным составляющим переменных, описывающих движение гироскопа; ω — безразмерная частота нутационных колебаний (о нутационных колебаниях смотрите в [36]).

Замечание 50.2. В [29] приближенное решение задачи (49.5) построено в виде асимптотики Васильевой (в виде суммы трех рядов). Использованная здесь асимптотика является асимптотикой Васильевой—Иманалиева [8].

50.2. Применение теорем 28.1–28.4 к задаче (49.5)

Нетрудно проверить, что задача (49.5) удовлетворяет условиям теоремы 28.1 (при любых значениях $n\geqslant 0$, $T>0$) и теоремы 28.3

(при любых $n \geqslant 0$, $\varkappa_1 = 0$), так как матрица $U_1(t, s)$ равна единичной: $U_1(t, s) = E$. Для теоремы 28.2 не выполняется неравенство (28.3), так как $\|U_1(t, s)\| = 1$. Условия теоремы 28.4 выполняются, однако эта теорема слабее теоремы 28.3, поэтому ее не рассматриваем.

По теореме 28.1 для любых $T > 0$, $n \geqslant 0$ найдутся значения $\mu_* > 0$, C_*, не зависящие от t, μ и такие, что решение задачи (49.5) существует единственно и удовлетворяет неравенству $\|x(t, \mu) - X_n(t, \mu)\| \leqslant C_* \mu^{n+1}$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

По теореме 28.3 для любых значений $n \geqslant 0$, $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < 1/2$, найдутся $\mu_* > 0$, C_*, $C_*^\circ \geqslant 0$, не зависящие от t, μ и такие, что решение задачи (49.5) существует, единственно и удовлетворяет неравенству $\|x(t, \mu) - X_n(t, \mu)\| \leqslant \mu^{n+1}(C_*^\circ t^{2n+1} + C_*)$ при $0 \leqslant t \leqslant T\mu^{-\chi}$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Отсюда видно, что теоремы 28.1, 28.3 не гарантируют существование решения задачи (49.5), так как значение μ в задаче (49.5) задано: $\mu \approx 0{,}016$, а значение μ_* в теоремах 28.1, 28.3 неизвестно.

Теорема 28.5 решает вопрос о существовании решения задачи (49.5) и дает оценки остаточного члена асимптотики и интервала времени. Более точные оценки получены в п. 50.3, где использовано не утверждение теоремы 28.5, а метод ее доказательства.

50.3. Оценка точности первого приближения решения

Обозначим u_1 остаточный член асимптотики первого порядка:

$$u_1 = x - X_1, \quad u_1 = (\zeta_{11}, \zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}), \quad \zeta_{1i} = \xi_i - \xi_{1i}, \quad i = \overline{1, 4}. \tag{50.8}$$

Оценим u_1, следуя методу, использованному при доказательстве теоремы 28.5 в § 29. Из (49.5), (50.7), (50.8) найдем уравнения для ζ_{1i}:

$$\begin{gathered}
\frac{d\zeta_{11}}{dt} = \zeta_{13}, \quad \frac{d\zeta_{12}}{dt} = \zeta_{14}, \\
\mu\frac{d\zeta_{13}}{dt} = -a_1\zeta_{13} - \cos\beta^\circ\zeta_{14} + \Gamma_{13}(u_1, t), \\
\mu\frac{d\zeta_{14}}{dt} = -\cos\beta^\circ\zeta_{13} - a_2\zeta_{14} + \Gamma_{14}(u_1, t), \\
\zeta_{1i}|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1, 4}.
\end{gathered} \tag{50.9}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13}(u_1, t) &= \left[\cos\beta^\circ - \cos\left(\beta^\circ + \mu\zeta_{12} + g(t)\right)\right]\left(\zeta_{14} + b_2 e^{-\delta\tau}\sin\omega\tau\right), \\
\Gamma_{14}(u_1, t) &= -\left[\cos\beta^\circ - \cos\left(\beta^\circ + \mu\zeta_{12} + g(t)\right)\right] \times \\
&\qquad \times \left[\zeta_{13} + e^{-\delta\tau}(\cos\omega\tau + b_1\sin\omega\tau)\right], \\
g(t) &\equiv -\mu^2 b_5 + \mu^2 e^{-\delta\tau}(b_5\cos\omega\tau + b_6\sin\omega\tau), \quad \tau = \frac{t}{\mu}.
\end{aligned}$$

Перейдем от задачи Коши (50.9) к интегральным уравнениям (так же, как в § 29 сделан переход от уравнений (28.6) к уравнениям (29.10)):

$$
\begin{gathered}
\zeta_{11}(t) = (\delta^2+\omega^2)^{-1}\Big\{ -\mu a_2\zeta_{13}(t) + \mu\cos\beta^\circ\zeta_{14}(t) + \\
+\int_0^t\int_0^1 \sin\big(\beta^\circ + \theta\mu\zeta_{12}(s) + \theta g(s)\big)\,d\theta\,[\mu\zeta_{12}(s) + g(s)]\,\big[\cos\beta^\circ\zeta_{13}(s) + \\
+ a_2\zeta_{14}(s) + \cos\beta^\circ e^{-\delta\sigma}\cos\omega\sigma + (b_1\cos\beta^\circ + a_2 b_2)e^{-\delta\sigma}\sin\omega\sigma\big]\,ds\Big\}, \\
\zeta_{12}(t) = (\delta^2+\omega^2)^{-1}\Big\{ -\mu\cos\beta^\circ\zeta_{13}(t) - \mu a_1\zeta_{14}(t) + \\
+\int_0^t\int_0^1 \sin\big(\beta^\circ + \theta\mu\zeta_{12}(s) + \theta g(s)\big)\,d\theta\,[\mu\zeta_{12}(s) + g(s)]\,\big[-a_1\zeta_{13}(s) + \\
+\cos\beta^\circ\zeta_{14}(s) - a_1 e^{-\delta\sigma}\cos\omega\sigma - (a_1 b_1 - b_2\cos\beta^\circ)e^{-\delta\sigma}\sin\omega\sigma\big]\,ds\Big\}, \\
\zeta_{13}(t) = \int_0^\tau\int_0^1 \sin\big(\beta^\circ + \theta\mu\zeta_{12}(s) + \theta g(s)\big)\,d\theta\,[\mu\zeta_{12}(s) + g(s)]\,e^{-\delta(\tau-\sigma)}\times \\
\times\big\{b_2\sin\omega(\tau-\sigma)\zeta_{13}(s) + [\cos\omega(\tau-\sigma) + b_1\sin\omega(\tau-\sigma)]\zeta_{14}(s) + \\
+ b_2 e^{-\delta\sigma}\cos\omega(\tau-\sigma)\sin\omega\sigma + \\
+ b_2 e^{-\delta\sigma}\sin\omega(\tau-\sigma)(\cos\omega\sigma + 2b_1\sin\omega\sigma)\big\}\,d\sigma, \\
\zeta_{14}(t) = \int_0^\tau\int_0^1 \sin\big(\beta^\circ + \theta\mu\zeta_{12}(s) + \theta g(s)\big)\,d\theta\,[\mu\zeta_{12}(s) + g(s)]\,e^{-\delta(\tau-\sigma)}\times \\
\times\big\{[-\cos\omega(\tau-\sigma) + b_1\sin\omega(\tau-\sigma)]\zeta_{13}(s) + b_2\sin\omega(\tau-\sigma)\zeta_{14}(s) - \\
- e^{-\delta\sigma}\cos\omega(\tau-\sigma)(\cos\omega\sigma + b_1\sin\omega\sigma) + \\
+ e^{-\delta\sigma}\sin\omega(\tau-\sigma)\big[b_1\cos\omega\sigma + (b_1^2+b_2^2)\sin\omega\sigma\big]\big\}\,d\sigma, \quad \sigma = \frac{s}{\mu}.
\end{gathered}
\tag{50.10}
$$

Введем функции

$$
v_{1i}(t) = \max_{0\leqslant s\leqslant t}|\zeta_{1i}(s)|, \quad i=\overline{1,4}, \quad v_1(t) = \max_{i=\overline{2,4}} v_{1i}(t),
$$

$$
f_1(t) \equiv \max_{|\zeta|\leqslant\mu v_{12}(t)+\mu^2\left[|b_5|+\sqrt{b_5^2+b_6^2}\right]} |\sin(\beta^\circ+\zeta)|.
$$

Из (50.10) найдем неравенства для v_{1i}:

$$
v_{11}(t) \leqslant f_{11}(v,t) \equiv \frac{\mu}{\delta^2+\omega^2}\Big\{a_2 v_{13}(t) + \cos\beta^\circ v_{14}(t) + f_1(t)\big[v_{12}(t) + \mu|b_5|\big]\times
$$

$$\times\left[\cos\beta^\circ t v_{13}(t) + a_2 t v_{14}(t) + \frac{\mu}{\delta}\sqrt{\cos^2\beta^\circ + (b_1\cos\beta^\circ + a_2 b_2)^2}\right] +$$
$$+\frac{\mu^2 f_1(t)\sqrt{b_5^2+b_6^2}}{\delta}\left[\cos\beta^\circ v_{13}(t) + a_2 v_{14}(t) +\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\beta^\circ + (b_1\cos\beta^\circ + a_2 b_2)^2}\right]\Bigg\}, \tag{50.11}$$

$$v_{12}(t) \leqslant f_{12}(v,t) \equiv \frac{\mu}{\delta^2+\omega^2}\Bigg\{\cos\beta^\circ v_{13}(t) + a_1 v_{14}(t) +$$
$$+ f_1(t)\left[v_{12}(t) + \mu|b_5|\right]\left[a_1 t v_{13}(t) + \cos\beta^\circ t v_{14}(t) +\right.$$
$$\left.+\frac{\mu}{\delta}\sqrt{a_1^2 + (a_1 b_1 - b_2\cos\beta^\circ)^2}\right] + \frac{\mu^2 f_1(t)\sqrt{b_5^2+b_6^2}}{\delta}\times$$
$$\times\left[a_1 v_{13}(t) + \cos\beta^\circ v_{14}(t) + \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 + (a_1 b_1 - b_2\cos\beta^\circ)^2}\right]\Bigg\},$$

$$v_{13}(t) \leqslant f_{13}(v,t) \equiv \frac{\mu f_1(t)}{\delta}\Bigg\{\left[v_{12}(t) + \mu|b_5|\right]\left[b_2 v_{13}(t) +\right.$$
$$\left.+\sqrt{1+b_1^2}\,v_{14}(t) + b_1 b_2 e^{-1} + b_2 e^{-1}\sqrt{1+b_1^2}\right] + \frac{\mu\sqrt{b_5^2+b_6^2}}{4e}\times$$
$$\times\left[4b_2 v_{13}(t) + 4\sqrt{1+b_1^2}\,v_{14}(t) + b_1 b_2 e + b_2 e\sqrt{1+b_1^2}\right]\Bigg\},$$

$$v_{14}(t) \leqslant f_{14}(v,t) \equiv \frac{\mu f_1(t)}{\delta}\Bigg\{\left[v_{12}(t) + \mu|b_5|\right]\left[\sqrt{1+b_1^2}\,v_{13}(t) +\right.$$
$$\left.+ b_2 v_{14}(t) + \frac{1}{2e}(1+b_1^2+b_2^2) + \frac{1}{2e}\sqrt{(1-b_1^2-b_2^2)^2 + 4b_1^2}\right] +$$
$$+\frac{\mu\sqrt{b_5^2+b_6^2}}{8e}\times\left[8\sqrt{1+b_1^2}\,v_{13}(t) + 8b_2 v_{14}(t) +\right.$$
$$\left.+ e(1+b_1^2+b_2^2)^2 + e\sqrt{(1-b_1^2-b_2^2)^2 + 4b_1^2}\right]\Bigg\}.$$

Эти неравенства справедливы, если решение задачи (50.9) существует на отрезке $[0, t]$. Из них следует:

$$v_1(t) \leqslant a(t) v_1^2(t) + b(t) v_1(t) + c,$$
$$a(t) \equiv \max\left\{\frac{(a_1 + \cos\beta^\circ)\mu t}{\delta^2+\omega^2}, \frac{\mu}{\delta}\left(b_2 + \sqrt{1+b_1^2}\right)\right\},$$

$$b(t) \equiv \max\left\{\frac{\mu}{\delta^2+\omega^2}\left[(a_1+\cos\beta^\circ)\left(1+|b_5|\mu t+\frac{\mu^2}{\delta}+\sqrt{b_5^2+b_6^2}\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\mu}{\delta}\sqrt{a_1^2+(a_1b_1-b_2\cos\beta^\circ)^2}\right],$$
$$\frac{\mu}{\delta}\left[\frac{b_2}{e}\left(b_1+\sqrt{1+b_1^2}\right)+\mu\left(b_2+\sqrt{1+b_1^2}\right)+\left(|b_5|+\frac{1}{e}\sqrt{b_5^2+b_6^2}\right)\right],$$
$$\frac{\mu}{\delta}\left[\frac{1}{2e}(1+b_1^2+b_2^2)+\frac{1}{2e}\sqrt{(1-b_1^2-b_2^2)^2+4b_1^2}+\right.$$
$$\left.\left.+\mu\left(b_2+\sqrt{1+b_1^2}\right)\left(|b_5|+e^{-1}\sqrt{b_5^2+b_6^2}\right)\right]\right\},$$
$$c \equiv \max\left\{\frac{\mu^3}{\delta(\delta^2+\omega^2)}\sqrt{a_1^2+(a_1b_1-b_2\cos\beta^\circ)^2}\left(|b_5|+\frac{1}{2}\sqrt{b_5^2+b_6^2}\right),\right.$$
$$\frac{\mu^2 b_2}{\delta}\left(b_1+\sqrt{1+b_1^2}\right)\left(\frac{|b_5|}{e}+\frac{1}{4}\sqrt{b_5^2+b_6^2}\right),$$
$$\left.\frac{\mu^2}{2\delta}\left[1+b_1^2+b_2^2+\sqrt{(1-b_1^2-b_2^2)^2+4b_1^2}\right]\left(\frac{|b_5|}{e}+\frac{1}{4}\sqrt{b_5^2+b_6^2}\right)\right\}.$$

Из доказательства теоремы 28.5 в § 29 следует: на множестве

$$1-b(t)>0, \quad \left[1-b(t)\right]^2-4a(t)c>0 \tag{50.12}$$

решение задачи (50.9) (а значит, и задачи (49.5)) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$v_1(t) \leqslant v_{11}(t) \equiv \frac{2c}{1-b(t)+\sqrt{[1-b(t)]^2-4a(t)c}}. \tag{50.13}$$

Решая (50.12) численно, получим: решение задачи (50.9) существует и единственно, по крайней мере, на отрезке

$$0 \leqslant t \leqslant 2763{,}003. \tag{50.14}$$

Рассмотрим момент времени

$$t_1 = \frac{15c}{\mathsf{T}_*} \approx 327{,}327.$$

Предположим, что $v_{1i}(t) \leqslant v_{1i}^{(n-1)}$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Тогда при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ справедливы неравенства

$$|\zeta_{1i}(t)| \leqslant v_{1i}(t) \leqslant v_{1i}^{(n)} = f_{1i}\left(v^{(n-1)}, t_1\right),$$

где f_{1i} — функции (50.11). Получили рекуррентные формулы

$$v_{1i}^{(n)} = f_{1i}\left(v^{(n-1)}, t_1\right), \quad i=\overline{1,4}.$$

Примем

$$v_{1i}^{(0)} = v_{11}(t_1) \approx 0{,}431 \cdot 10^{-3}, \quad i=\overline{2,4}.$$

Это возможно, так как $v_{1i}(t) \leqslant v_1(t) \leqslant v_1(t_1) \leqslant v_{11}(t_1)$. Значение $v_{1i}^{(0)}$ не требуется, так как оно не входит в формулы для f_{1i}. Вычисляя $v_{1i}^{(n)}$ для $n = 1, 2, \ldots$, получим: при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ выполняются неравенства

$$|\zeta_{11}| \leqslant 0{,}249 \cdot 10^{-4}, \qquad |\zeta_{12}| \leqslant 0{,}159 \cdot 10^{-4},$$
$$|\zeta_{13}| \leqslant 0{,}194 \cdot 10^{-3}, \qquad |\zeta_{14}| \leqslant 0{,}194 \cdot 10^{-3}. \tag{50.15}$$

Сформулируем полученные результаты в размерных переменных используя (49.3), (50.7), (50.8), (50.14), (50.15).

50.4. Результаты

А. Решение задачи (49.1), (49.2) существует и единственно, по крайней мере, на интервале
$$0 \leqslant \mathrm{T} \leqslant 2{,}110 \text{ мин.} \tag{50.16}$$

Б. Приближенное решение задачи (49.1), (49.2) имеет вид
$$\begin{gathered}
\alpha \approx \alpha_1 \equiv \alpha^\circ + \exp\{-\Delta\mathrm{T}\}\left[D_3\cos(\Omega\mathrm{T}) + D_4\sin(\Omega\mathrm{T})\right] - D_3,\\
\beta \approx \beta_1 \equiv \beta^\circ + \exp\{-\Delta\mathrm{T}\}\left[D_5\cos(\Omega\mathrm{T}) + D_6\sin(\Omega\mathrm{T})\right] - D_5,\\
\frac{d\alpha}{d\mathrm{T}} \approx \Omega_{\alpha 1} \equiv \exp\{-\Delta\mathrm{T}\}\left[\Omega_\alpha^\circ\cos(\Omega\mathrm{T}) + D_1\sin(\Omega\mathrm{T})\right],\\
\frac{d\beta}{d\mathrm{T}} \approx \Omega_{\beta 1} \equiv D_2\exp\{-\Delta\mathrm{T}\}\sin(\Omega\mathrm{T}),
\end{gathered} \tag{50.17}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{A + A_1 + A_2} + \frac{n_2}{A + B_1}\right) \approx 792{,}088\text{c}^{-1},$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{H^2\cos^2\beta^\circ}{(A + A_1 + A_2)(A + B_1)} - \frac{1}{4}\left(\frac{n_1}{A + A_1 + A_2} - \frac{n_2}{A + B_1}\right)^2} \approx$$
$$\approx 1116{,}853\text{c}^{-1},$$

$$D_1 = -\frac{\Omega_\alpha^\circ}{2\Omega}\left(\frac{n_1}{A + A_1 + A_2} - \frac{n_2}{A + B_1}\right) \approx 0{,}071\text{c}^{-1},$$

$$D_2 = \frac{\Omega_\alpha^\circ H\cos\beta^\circ}{\Omega(A + B_1)} \approx 0{,}369\text{c}^{-1},$$

$$D_3 = -\frac{n_2\Omega_\alpha^\circ(A + A_1 + A_2)}{H^2 D} = -1{,}27 \cdot 10^{-4},$$

$$D_4 = \frac{\Omega_\alpha^\circ}{\Omega D}\left[\cos^2\beta^\circ + \frac{n_1 n_2}{2H^2} - \frac{n_2^2(A + A_1 + A_2)}{2H^2(A + B_1)}\right] \approx 0{,}89 \cdot 10^{-4},$$

$$D_5 = \frac{\Omega_\alpha^\circ\cos\beta^\circ(A + A_1 + A_2)}{HD} \approx 2{,}20 \cdot 10^{-4},$$

$$D_6 = -\frac{\Omega_\alpha^\circ\Delta\cos\beta^\circ(A + A_1 + A_2)}{H\Omega D} \approx -1{,}56 \cdot 10^{-4}, \quad D = \cos^2\beta^\circ + \frac{n_1 n_2}{H^2}.$$

в. На отрезке $0 \leqslant \text{Т} \leqslant 15$ с справедливы неравенства

$$|\alpha - \alpha_1| \leqslant 0{,}047'', \qquad |\beta - \beta_1| \leqslant 0{,}053'',$$
$$\left|\frac{d\alpha}{d\text{Т}} - \Omega_{\alpha 1}\right| \leqslant 3{,}87 \cdot 10^{-5}\text{c}^{-1}, \quad \left|\frac{d\beta}{d\text{Т}} - \Omega_{\beta 1}\right| \leqslant 6{,}73 \cdot 10^{-5}\text{c}^{-1}. \tag{50.18}$$

§ 51. Модификация метода пограничных функций

51.1. Построение асимптотики

Асимптотическое решение задачи (49.5), построенное методом пограничных функций, содержит секулярные члены (порядка μ^k, $k \geqslant 2$) — слагаемые с множителем t. Эти слагаемые, кроме t, имеют множителем экспоненту с отрицательным показателем и поэтому не увеличиваются при $t \to \infty$. Модифицируем метод пограничных функций таким образом, чтобы слагаемые с множителем t в асимптотике не появлялись. При этом точность решения улучшится.

Модификация метода заключается в том, что некоторые параметры задачи рассматриваются как функции μ, которые подбираются так, чтобы выполнялись требуемые условия. Этот прием аналогичен тому, что использовал А. М. Ляпунов при нахождении периодического решения [33].

Рассмотрим β° как функцию параметра μ следующего вида:

$$\beta^\circ = \gamma_0 + \mu\gamma_1 + \mu^2\Delta\gamma, \tag{51.1}$$

где γ_0, γ_1 — искомые постоянные (не зависящие от t, μ), $\Delta\gamma$ — искомая гладкая функция μ. Решение задачи (49.5), (51.1) будем искать в виде (50.1), где

$$\eta_{1i} = \widetilde{\eta}_{1i}^{(0)}(t) + \mu\widetilde{\eta}_{1i}^{(1)}(t) + \ldots, \quad \eta_{2i} = \widetilde{\eta}_{2i}^{(0)}(\tau) + \mu\widetilde{\eta}_{2i}^{(1)}(\tau) + \ldots. \tag{51.2}$$

Подставим ряды (51.2) и выражение (51.1) в уравнения (49.5), разложим левые и правые части уравнений в ряды по степеням μ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ. Получим уравнения для $\widetilde{\eta}_{ji}^{(k)}$:

$\boxed{k = 0}$

$$\frac{d\widetilde{\eta}_{11}^{(0)}}{dt} = \widetilde{\eta}_{13}^{(0)}, \quad \frac{d\widetilde{\eta}_{12}^{(0)}}{dt} = \widetilde{\eta}_{14}^{(0)}, \quad 0 = -a_1\widetilde{\eta}_{13}^{(0)} - \cos\gamma_0\widetilde{\eta}_{14}^{(0)},$$
$$0 = \cos\gamma_0\widetilde{\eta}_{13}^{(0)} - a_2\widetilde{\eta}_{14}^{(0)}, \quad \frac{d\widetilde{\eta}_{21}^{(0)}}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\widetilde{\eta}_{22}^{(0)}}{d\tau} = 0,$$
$$\frac{d\widetilde{\eta}_{23}^{(0)}}{d\tau} = -a_1\widetilde{\eta}_{23}^{(0)} - \cos\gamma_0\widetilde{\eta}_{24}^{(0)}, \quad \frac{d\widetilde{\eta}_{24}^{(0)}}{d\tau} = \cos\gamma_0\widetilde{\eta}_{23}^{(0)} - a_2\widetilde{\eta}_{24}^{(0)},$$
$$\lim_{\tau\to\infty} \widetilde{\eta}_{2i}^{(0)}(\tau) = 0, \quad i = 1, 2,$$
$$\widetilde{\eta}_{1j}^{(0)}(0) + \widetilde{\eta}_{2j}^{(0)}(0) = 0, \quad j = 1, 2, 4, \quad \widetilde{\eta}_{13}^{(0)}(0) + \widetilde{\eta}_{23}^{(0)}(0) = 1;$$

$\boxed{k=1}$

$$\frac{d\widetilde{\eta}_{11}^{(1)}}{dt}=\widetilde{\eta}_{13}^{(1)},\qquad \frac{d\widetilde{\eta}_{12}^{(1)}}{dt}=\widetilde{\eta}_{14}^{(1)},$$

$$\frac{d\widetilde{\eta}_{13}^{(0)}}{dt}=-a_1\widetilde{\eta}_{13}^{(1)}-\cos\gamma_0\widetilde{\eta}_{14}^{(1)}+\sin\gamma_0\widetilde{\eta}_{14}^{(0)}\big(\widetilde{\eta}_{12}^{(0)}+\gamma_1\big),$$

$$\frac{d\widetilde{\eta}_{14}^{(0)}}{dt}=\cos\gamma_0\widetilde{\eta}_{13}^{(1)}-a_2\widetilde{\eta}_{14}^{(1)}-\sin\gamma_0\eta_{13}^{(0)}\big(\widetilde{\eta}_{12}^{(0)}+\gamma_1\big),$$

$$\frac{d\widetilde{\eta}_{21}^{(1)}}{d\tau}=\widetilde{\eta}_{23}^{(0)},\qquad \frac{d\widetilde{\eta}_{22}^{(1)}}{d\tau}=\widetilde{\eta}_{24}^{(0)},$$

$$\frac{d\widetilde{\eta}_{23}^{(1)}}{d\tau}=-a_1\widetilde{\eta}_{23}^{(1)}-\cos\gamma_0\widetilde{\eta}_{24}^{(1)}+\sin\gamma_0\big[\widetilde{\eta}_{12}^{(0)}(0)\widetilde{\eta}_{24}^{(0)}+\gamma_1\widetilde{\eta}_{24}^{(0)}+\widetilde{\eta}_{14}^{(0)}(0)\widetilde{\eta}_{22}^{(0)}+\widetilde{\eta}_{22}^{(0)}\widetilde{\eta}_{24}^{(0)}\big],$$

$$\frac{d\widetilde{\eta}_{24}^{(1)}}{d\tau}=\cos\gamma_0\widetilde{\eta}_{23}^{(1)}-a_2\widetilde{\eta}_{24}^{(1)}-\sin\gamma_0\big[\widetilde{\eta}_{12}^{(0)}(0)\widetilde{\eta}_{23}^{(0)}+\gamma_1\widetilde{\eta}_{23}^{(0)}+\widetilde{\eta}_{13}^{(0)}(0)\widetilde{\eta}_{22}^{(0)}+\widetilde{\eta}_{22}^{(0)}\widetilde{\eta}_{23}^{(0)}\big],$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\widetilde{\eta}_{2i}^{(1)}(\tau)=0,\quad i=1,2,\quad \widetilde{\eta}_{1j}^{(1)}(0)+\widetilde{\eta}_{2j}^{(1)}(0)=0,\quad j=\overline{1,4}.$$

Решение написанных уравнений имеет вид

$$\widetilde{\eta}_{1i}^{(0)}=0,\quad i=\overline{1,4};\quad \widetilde{\eta}_{2i}^{(0)}=0,\quad i=1,2;$$

$$\widetilde{\eta}_{23}^{(0)}=e^{-\delta\tau}(\cos\widetilde{\omega}\tau+c_1\sin\widetilde{\omega}\tau),\quad \widetilde{\eta}_{24}^{(0)}=c_2e^{-\delta\tau}\sin\widetilde{\omega}\tau,$$

$$\widetilde{\eta}_{11}^{(1)}=-c_3,\quad \widetilde{\eta}_{12}^{(1)}=-c_5,\quad \widetilde{\eta}_{1i}^{(1)}=0,\quad i=3,4,$$

$$\widetilde{\eta}_{21}^{(1)}=e^{-\delta\tau}(c_3\cos\widetilde{\omega}\tau+c_4\sin\widetilde{\omega}\tau),\quad \widetilde{\eta}_{22}^{(1)}=e^{-\delta\tau}(c_5\cos\widetilde{\omega}\tau+c_6\sin\widetilde{\omega}\tau),$$

$$\widetilde{\eta}_{23}^{(1)}=\gamma_1c_2\sin\gamma_0e^{-\delta\tau}\big[-c_1\tau\cos\widetilde{\omega}\tau+(\tau+c_1\widetilde{\omega}^{-1})\sin\widetilde{\omega}\tau\big],$$

$$\widetilde{\eta}_{24}^{(1)}=\gamma_1\sin\gamma_0e^{-\delta\tau}\big[-(1+c_1^2)\tau\cos\widetilde{\omega}\tau+c_1^2\widetilde{\omega}^{-1}\sin\widetilde{\omega}\tau\big],\tag{51.3}$$

где

$$\delta=\frac{1}{2}(a_1+a_2),\quad \widetilde{\omega}=\sqrt{\cos^2\gamma_0-\frac{(a_1-a_2)^2}{4}},$$

$$c_1=\frac{a_2-a_1}{2\widetilde{\omega}},\qquad c_2=\frac{\cos\gamma_0}{\widetilde{\omega}},\qquad c_3=-\frac{\delta+\widetilde{\omega}c_1}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2},\tag{51.4}$$

$$c_4=\frac{\widetilde{\omega}-\delta c_1}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2},\qquad c_5=-\frac{\widetilde{\omega}c_2}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2},\qquad c_6=-\frac{\delta c_2}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}.$$

Потребуем, чтобы в асимптотике отсутствовали секулярные члены. Тогда, предполагая, что γ_0 близко к β° и, значит,

$$\sin\gamma_0\neq 0,\tag{51.5}$$

из (51.3) получим $\gamma_1 = 0$. Из (50.1), (51.2), (51.3) получим асимптотику решения задачи (49.5), (51.1) с точностью до членов порядка $O(\mu^2)$:

$$\begin{gathered}
\widetilde{X}(t,\mu) = (\widetilde{\xi}_1, \widetilde{\xi}_2, \widetilde{\xi}_3, \widetilde{\xi}_4),\\
\widetilde{\xi}_1 = \mu e^{-\delta\tau}(c_3 \cos\widetilde{\omega}\tau + c_4 \sin\widetilde{\omega}\tau) - c_3\mu,\\
\widetilde{\xi}_2 = \mu e^{-\delta\tau}(c_5 \cos\widetilde{\omega}\tau + c_6 \sin\widetilde{\omega}\tau) - c_5\mu,\\
\widetilde{\xi}_3 = e^{-\delta\tau}(\cos\widetilde{\omega}\tau + c_1 \sin\widetilde{\omega}\tau), \quad \widetilde{\xi}_4 = c_2 e^{-\delta\tau}\sin\widetilde{\omega}\tau, \quad \tau = \frac{t}{\mu}.
\end{gathered} \tag{51.6}$$

Здесь осталась неопределенной постоянная γ_0. Ее выберем ниже при оценке остаточного члена.

51.2. О точности асимптотического решения

Обозначим u остаточный член модифицированной асимптотики:

$$u = x - \widetilde{X}, \quad u = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4), \quad \zeta_i = \xi_i - \widetilde{\xi}_i, \quad i = \overline{1,4}. \tag{51.7}$$

Из (49.5), (51.6) найдем уравнения для ζ_i:

$$\begin{gathered}
\frac{d\zeta_1}{dt} = \zeta_3, \quad \frac{d\zeta_2}{dt} = \zeta_4, \quad \mu\frac{d\zeta_3}{dt} = -a_1\zeta_3 - \cos\gamma_0\zeta_4 + \Gamma_3(u,t),\\
\mu\frac{d\zeta_4}{dt} = \cos\gamma_0\zeta_3 - a_2\zeta_4 + \Gamma_4(u,t), \quad \zeta_i|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1,4}.
\end{gathered} \tag{51.8}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
\Gamma_3(u,t) = \left[\cos\gamma_0 - \cos\left(\gamma_0 + \mu\zeta_2 + \widetilde{g}(t)\right)\right](\zeta_4 + c_2 e^{-\delta\tau}\sin\widetilde{\omega}\tau),\\
\Gamma_4(u,t) = -\left[\cos\gamma_0 - \cos\left(\gamma_0 + \mu\zeta_2 + \widetilde{g}(t)\right)\right]\left[\zeta_3 + e^{-\delta\tau}(\cos\widetilde{\omega}\tau + c_1\sin\widetilde{\omega}\tau)\right],\\
\widetilde{g}(t) = \mu^2(\Delta\gamma - c_5) + \mu^2 e^{-\delta\tau}(c_5\cos\widetilde{\omega}\tau + c_6\sin\widetilde{\omega}\tau), \quad \tau = \frac{t}{\mu}.
\end{gathered}$$

Выберем $\Delta\gamma$ так, чтобы в $\widetilde{g}(t)$ исключить члены без экспоненциального множителя. Тогда $\Delta\gamma = c_5$. Формула (51.1) примет вид $\beta^\circ = \gamma_0 + \mu^2 c_5$. Отсюда и из (51.4) получим уравнение для определения γ_0:

$$\gamma_0 = \beta^\circ + \frac{\mu^2\cos\gamma_0}{a_1 a_2 + \cos^2\gamma_0}. \tag{51.9}$$

Соответственно формула для $\widetilde{g}(t)$ примет вид

$$\widetilde{g}(t) = \mu^2 e^{-\delta\tau}(c_5\cos\widetilde{\omega}\tau + c_6\sin\widetilde{\omega}\tau).$$

Перейдем от задачи Коши к интегральным уравнениям (так же, как в § 29 перешли от уравнений (28.6) к уравнениям (29.10)). Получим

$$\zeta_1(t) = \frac{1}{\delta^2 + \widetilde{\omega}^2}\Big\{ -\mu a_2\zeta_3(t) + \mu\cos\gamma_0\zeta_4(t) +$$

$$+\int_0^t\int_0^1 \sin\bigl(\gamma_0+\theta\mu\zeta_2(s)+\theta\widetilde{g}(s)\bigr)\,d\theta\,[\mu\zeta_2(s)+\widetilde{g}(s)]\times$$

$$\times\left[\cos\gamma_0\zeta_3(s)+a_2\zeta_4(s)+\cos\gamma_0 e^{-\delta\sigma}\cos\widetilde{\omega}\sigma+(c_1\cos\gamma_0+a_2c_2)e^{-\delta\sigma}\sin\widetilde{\omega}\sigma\right]ds\biggr\},$$

$$\zeta_2(t)=\frac{1}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}\biggl\{-\mu\cos\gamma_0\zeta_3(t)-\mu a_1\zeta_4(t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 \sin\bigl(\gamma_0+\theta\mu\zeta_2(s)+\theta\widetilde{g}(s)\bigr)\,d\theta\,[\mu\zeta_2(s)+\widetilde{g}(s)]\times$$

$$\times\left[-a_1\zeta_3(s)+\cos\gamma_0\zeta_4(s)-a_1e^{-\delta\sigma}\cos\widetilde{\omega}\sigma-(a_1c_1-c_2\cos\gamma_0)e^{-\delta\sigma}\sin\widetilde{\omega}\sigma\right]ds\biggr\},$$

$$\zeta_3(t)=\int_0^\tau\int_0^1 \sin\bigl(\gamma_0+\theta\mu\zeta_2(s)+\theta\widetilde{g}(s)\bigr)\,d\theta\,[\mu\zeta_2(s)+\widetilde{g}(s)]\,e^{-\delta(\tau-\sigma)}\times$$

$$\times\bigl\{c_2\sin\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)\zeta_3(s)+\left[\cos\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)+c_1\sin\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)\right]\zeta_4(s)+$$

$$+c_2e^{-\delta\sigma}\cos\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)\sin\widetilde{\omega}\sigma+c_2e^{-\delta\sigma}\sin\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)(\cos\widetilde{\omega}\sigma+2c_1\sin\widetilde{\omega}\sigma)\bigr\}\,d\sigma,$$

$$\zeta_4(t)=\int_0^\tau\int_0^1 \sin\bigl(\gamma_0+\theta\mu\zeta_2(s)+\theta\widetilde{g}(s)\bigr)\,d\theta\,[\mu\zeta_2(s)+\widetilde{g}(s)]\,e^{-\delta(\tau-\sigma)}\times$$

$$\times\bigl\{\left[-\cos\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)+c_1\sin\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)\right]\zeta_3(s)+c_2\sin\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)\zeta_4(s)-$$

$$-e^{-\delta\sigma}\cos\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)(\cos\widetilde{\omega}\sigma+c_1\sin\widetilde{\omega}\sigma)+$$

$$+e^{-\delta\sigma}\sin\widetilde{\omega}(\tau-\sigma)\left[c_1\cos\widetilde{\omega}\sigma+(c_1^2+c_2^2)\sin\widetilde{\omega}\sigma\right]\bigr\}\,d\sigma.$$

Отсюда следует: если решение задачи (51.8) существует на отрезке $[0,t]$, то справедливы неравенства

$$|\zeta_1(t)|\leqslant\frac{\mu}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}\biggl\{a_2|\zeta_3(t)|+\cos\gamma_0|\zeta_4(t)|+$$

$$+\widetilde{f}(t)\int_0^t\Bigl(|\zeta_2(s)|+\mu\sqrt{c_5^2+c_6^2}\,e^{-\delta\sigma}\Bigr)\cdot\Bigl[\cos\gamma_0|\zeta_3(s)|+a_2|\zeta_4(s)|+ \qquad (51.10)$$

$$+\sqrt{\cos^2\gamma_0+(c_1\cos\gamma_0+a_2c_2)^2}\,e^{-\delta\sigma}\Bigr]ds\biggr\},$$

$$|\zeta_2(t)|\leqslant\frac{\mu}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}\left\{\cos\gamma_0|\zeta_3(t)|+a_1|\zeta_4(t)|+\widetilde{f}(t)\int\limits_0^t\left(|\zeta_2(s)|+\mu\sqrt{c_5^2+c_6^2}e^{-\delta\sigma}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left[a_1|\zeta_3(s)|+\cos\gamma_0|\zeta_4(s)|+\sqrt{a_1^2+(a_1c_1-c_2\cos\gamma_0)^2}e^{-\delta\sigma}\right]ds\right\},$$

$$|\zeta_3(t)|\leqslant\mu\widetilde{f}(t)\int\limits_0^\tau\left(|\zeta_2(s)|+\mu\sqrt{c_5^2+c_6^2}e^{-\delta\sigma}\right)e^{-\delta(\tau-\sigma)}\times$$
$$\times\left[c_2|\zeta_3(s)|+\sqrt{1+c_1^2}|\zeta_4(s)|+\left(c_1+\sqrt{1+c_1^2}\right)c_2e^{-\delta\sigma}\right]d\sigma,$$

$$|\zeta_4(t)|\leqslant\mu\widetilde{f}(t)\int\limits_0^\tau\left(|\zeta_2(s)|+\mu\sqrt{c_5^2+c_6^2}e^{-\delta\sigma}\right)e^{-\delta(\tau-\sigma)}\times$$
$$\times\left[\sqrt{1+c_1^2}|\zeta_3(s)|+c_2|\zeta_4(s)|+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(1+c_1^2+c_2^2)e^{-\delta\sigma}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(1-c_1^2-c_2^2\right)^2+4c_1^2}e^{-\delta\sigma}\right]d\sigma.$$

Здесь

$$\widetilde{f}(t)\equiv\max_{|\zeta|\leqslant\mu v_2(t)+\mu^2\sqrt{c_5^2+c_6^2}}\left|\sin(\gamma_0+\zeta)\right|,\quad v_i(t)\equiv\max_{0\leqslant s\leqslant t}|\zeta_i(s)|,\quad i=\overline{1,4}.$$

Из (51.10) получим неравенства для v_i:

$$v_1(t)\leqslant f_1(v,t)\equiv\frac{\mu}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}\left\{a_2v_3(t)+\cos\gamma_0v_4(t)+\right.$$
$$+\widetilde{f}(t)\left[tv_2(t)+\frac{\mu^2}{\delta}\sqrt{c_5^2+c_6^2}\right]\left[\cos\gamma_0v_3(t)+a_2v_4(t)\right]+$$
$$\left.+\frac{\mu\widetilde{f}(t)}{\delta}\sqrt{\cos^2\gamma_0+(c_1\cos\gamma_0+a_2c_2)^2}\left[v_2(t)+\frac{\mu}{2}\sqrt{c_5^2+c_6^2}\right]\right\},\tag{51.11}$$
$$v_2(t)\leqslant f_2(v,t)\equiv\frac{\mu}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}\left\{\cos\gamma_0v_3(t)+a_1v_4(t)+\right.$$
$$+\widetilde{f}(t)\left[tv_2(t)+\frac{\mu^2}{\delta}\sqrt{c_5^2+c_6^2}\right]\left[a_1v_3(t)+\cos\gamma_0v_4(t)\right]+$$
$$\left.+\frac{\mu\widetilde{f}(t)}{\delta}\sqrt{a_1^2+(a_1c_1-c_2\cos\gamma_0)^2}\left[v_2(t)+\frac{\mu}{2}\sqrt{c_5^2+c_6^2}\right]\right\},$$

$$v_3(t) \leqslant f_3(v,t) \equiv \frac{\mu\widetilde{f}(t)}{\delta}\left[v_2(t) + \frac{\mu}{e}\sqrt{c_5^2+c_6^2}\right]\left[c_2v_3(t) + \sqrt{1+c_1^2}v_4(t)\right] + \\ + \frac{\mu c_2\widetilde{f}(t)}{\delta}\left(c_1+\sqrt{1+c_1^2}\right)\left[\frac{v_2(t)}{e} + \frac{\mu}{4}\sqrt{c_5^2+c_6^2}\right],$$

$$v_4(t) \leqslant f_4(v,t) \equiv \frac{\mu\widetilde{f}(t)}{\delta}\left[v_2(t) + \frac{\mu}{e}\sqrt{c_5^2+c_6^2}\right]\left[\sqrt{1+c_1^2}v_3(t) + c_2v_4(t)\right] + \\ + \frac{\mu\widetilde{f}(t)}{2\delta}\left[1+c_1^2+c_2^2+\sqrt{(1-c_1^2-c_2^2)^2+4c_1^2}\right]\left[\frac{v_2(t)}{e} + \frac{\mu}{4}\sqrt{c_5^2+c_6^2}\right].$$

Отсюда следует неравенство для $v(t) = \max\limits_{i=\overline{2,4}} v_i(t)$:

$$v(t) \leqslant \widetilde{a}(t)v^2(t) + \widetilde{b}v(t) + \widetilde{c},$$

$$\widetilde{a}(t) \equiv \max\left\{\frac{(a_1+\cos\gamma_0)\mu t}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}, \frac{\mu}{\delta}\left(c_2+\sqrt{1+c_1^2}\right)\right\},$$

$$\begin{aligned}\widetilde{b} \equiv \max\Bigg\{ & \frac{\mu}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}\left[(a_1+\cos\gamma_0)\left(1+\frac{\mu^2}{\delta}\sqrt{c_5^2+c_6^2}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{\mu}{\delta}\sqrt{a_1^2+(a_1c_1-c_2\cos\gamma_0)^2}\right], \\ & \frac{\mu}{\delta e}\left[\mu\sqrt{c_5^2+c_6^2}\left(c_2+\sqrt{1+c_1^2}\right) + c_2\left(c_1+\sqrt{1+c_1^2}\right)\right], \\ & \frac{\mu}{\delta e}\left[\mu\sqrt{c_5^2+c_6^2}\left(c_2+\sqrt{1+c_1^2}\right) + \frac{1}{2}(1+c_1^2+c_2^2) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\sqrt{(1-c_1^2-c_2^2)^2+4c_1^2}\right]\Bigg\}, \end{aligned} \qquad (51.12)$$

$$\begin{aligned}\widetilde{c} \equiv \frac{\mu^2}{2\delta}\sqrt{c_5^2+c_6^2}\max\Bigg\{ & \frac{\mu}{\delta^2+\widetilde{\omega}^2}\sqrt{a_1^2+(a_1c_1-c_2\cos\gamma_0)^2}, \\ & \frac{c_2}{2}\left(c_1+\sqrt{1+c_1^2}\right), \frac{1}{4}\left[1+c_1^2+c_2^2+\sqrt{(1-c_1^2-c_2^2)^2+4c_1^2}\right]\Bigg\}.\end{aligned}$$

Следуя доказательству теоремы 28.5 в § 29, из (51.12) получим: на множестве

$$1-\widetilde{b} > 0, \quad (1-\widetilde{b})^2 - 4\widetilde{a}(t)\widetilde{c} > 0 \qquad (51.13)$$

решение задачи (51.8) (а значит и задачи (49.5)) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$v(t) \leqslant \widetilde{v}(t) = \frac{2\widetilde{c}}{1-\widetilde{b}+\sqrt{(1-\widetilde{b})^2-4\widetilde{a}(t)\widetilde{c}}}.$$

Приведем результаты численных расчетов по формулам (51.4), (51.9), (51.12), (51.13):

$$\delta \approx 0{,}578, \quad \widetilde{\omega} \approx 0{,}816, \quad \gamma_0 \approx 30{,}013^\circ,$$
$$c_1 \approx 0{,}357, \quad c_2 \approx 1{,}062, \quad c_3 \approx -0{,}870, \quad c_4 \approx 0{,}609,$$
$$c_5 \approx -0{,}866, \quad c_6 \approx -0{,}614, \quad \widetilde{b} \approx 0{,}019, \quad \widetilde{c} \approx 1{,}76 \cdot 10^{-4}.$$

Интервал существования решения задач (51.8) и (49.5), по крайней мере, следующий:

$$0 \leqslant t \leqslant 74577{,}377. \tag{51.14}$$

Отметим, что условие (51.5) выполняется. Оценим решение задачи (51.8) на отрезке

$$0 \leqslant t \leqslant t_1 = \frac{15\text{с}}{\mathsf{T}_*} \approx 327{,}327.$$

При $0 \leqslant t \leqslant t_1$ справедливы неравенства $|\zeta_i(t)| \leqslant v_i^{(n)} = f_i(v^{(n-1)}, t_1)$, где f_i – функции (51.11). Положим $v_2^{(0)} = v_3^{(0)} = v_4^{(0)} = \widetilde{v}(t_1) \approx 1{,}80 \cdot 10^{-4}$. Вычисляя $v_i^{(n)}$ при $n = 1, 2, \ldots$, получим: при $0 \leqslant t \leqslant t_1$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\zeta_1| &\leqslant 5{,}31 \cdot 10^{-6}, \quad & |\zeta_2| &\leqslant 3{,}23 \cdot 10^{-6}, \\ |\zeta_3| &\leqslant 8{,}79 \cdot 10^{-5}, \quad & |\zeta_4| &\leqslant 8{,}79 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \tag{51.15}$$

Сформулируем полученные результаты для размерных переменных, используя формулы (49.3), (51.6), (51.7), (51.14), (51.15).

51.3. Результаты

А. Решение задачи (49.1), (49.2) существует и единственно, по крайней мере, на отрезке

$$0 \leqslant \mathsf{T} \leqslant 56{,}959\ \text{мин}. \tag{51.16}$$

Б. Приближенное решение задачи (49.1), (49.2), построенное модифицированным методом пограничных функций, имеет вид

$$\begin{aligned} &\alpha \approx \widetilde{\alpha} \equiv \alpha^\circ + \exp\{-\Delta\mathsf{T}\}\left[\widetilde{D}_3 \cos(\widetilde{\Omega}\mathsf{T}) + \widetilde{D}_4 \sin(\widetilde{\Omega}\mathsf{T})\right] - \widetilde{D}_3, \\ &\beta \approx \widetilde{\beta} \equiv \beta^\circ + \exp\{-\Delta\mathsf{T}\}\left[\widetilde{D}_5 \cos(\widetilde{\Omega}\mathsf{T}) + \widetilde{D}_6 \sin(\widetilde{\Omega}\mathsf{T})\right] - \widetilde{D}_5, \\ &\frac{d\alpha}{d\mathsf{T}} \approx \widetilde{\Omega}_\alpha \equiv \exp\{-\Delta\mathsf{T}\}\left[\omega_\alpha^\circ \cos(\widetilde{\Omega}\mathsf{T}) + \widetilde{D}_1 \sin(\widetilde{\Omega}\mathsf{T})\right], \\ &\frac{d\beta}{d\mathsf{T}} \approx \widetilde{\Omega}_\beta \equiv \widetilde{D}_2 \exp\{-\Delta\mathsf{T}\} \sin(\widetilde{\Omega}\mathsf{T}). \end{aligned} \tag{51.17}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{A + A_1 + A_2} + \frac{n_2}{A + B_1}\right) \approx 792{,}088\text{с}^{-1},$$

$$\widetilde{\Omega} = \sqrt{\frac{H^2\cos^2\gamma_0}{(A+A_1+A_2)(A+B_1)} - \frac{1}{4}\left(\frac{n_1}{A+A_1+A_2} - \frac{n_2}{A+B_1}\right)^2} \approx$$

$$\approx 1116{,}693\text{c}^{-1},$$

$$\widetilde{D}_1 = -\frac{\Omega_\alpha^\circ}{2\widetilde{\Omega}}\left(\frac{n_1}{A+A_1+A_2} - \frac{n_2}{A+B_1}\right) \approx 0{,}071\text{c}^{-1},$$

$$\widetilde{D}_2 = \frac{\Omega_\alpha^\circ H\cos\gamma_0}{\widetilde{\Omega}(A+B_1)} \approx 0{,}369\text{c}^{-1},$$

$$\widetilde{D}_3 = -\frac{n_2\Omega_\alpha^\circ(A+A_1+A_2)}{H^2\widetilde{D}} = -1{,}27\cdot 10^{-4},$$

$$\widetilde{D}_4 = \frac{\Omega_\alpha^\circ}{\widetilde{\Omega}\widetilde{D}}\left[\cos^2\gamma_0 + \frac{n_1n_2}{2H^2} - \frac{n_2^2(A+A_1+A_2)}{2H^2(A+B_1)}\right] \approx 0{,}89\cdot 10^{-4},$$

$$\widetilde{D}_5 = \frac{\Omega_\alpha^\circ\cos\gamma_0(A+A_1+A_2)}{H\widetilde{D}} \approx 2{,}20\cdot 10^{-4},$$

$$\widetilde{D}_6 = -\frac{\Omega_\alpha^\circ\Delta\cos\gamma_0(A+A_1+A_2)}{H\widetilde{\Omega}\widetilde{D}} \approx -1{,}56\cdot 10^{-4},$$

$$\widetilde{D} = \cos^2\gamma_0 + \frac{n_1n_2}{H^2},$$

γ_0 — корень уравнения

$$\gamma_0 = \beta^\circ + \frac{\Omega_\alpha^\circ(A+A_1+A_2)\cos\gamma_0}{H\widetilde{D}}, \quad \gamma_0 \approx 30{,}013^\circ.$$

В. На отрезке $0 \leqslant \text{T} \leqslant 15$ с справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &|\alpha - \widetilde{\alpha}| \leqslant 0{,}011'', && |\beta - \widetilde{\beta}| \leqslant 0{,}011'', \\ &\left|\frac{d\alpha}{d\text{T}} - \widetilde{\Omega}_\alpha\right| \leqslant 1{,}76\cdot 10^{-5}\text{c}^{-1}, && \left|\frac{d\beta}{d\text{T}} - \widetilde{\Omega}_\beta\right| \leqslant 3{,}06\cdot 10^{-5}\text{c}^{-1}. \end{aligned} \tag{51.18}$$

Замечание 51.1. Выбор $\Delta\gamma$ позволил убрать секулярные члены в коэффициенте $\widetilde{b}$ в неравенстве (51.12). При этом улучшилась оценка интервала существования решения и оценка точности решения (сравните (50.16), (50.18) с (51.16), (51.18)).

§ 52. Применение метода двух параметров

Нетрудно проверить, что задача (49.5) удовлетворяет условиям теорем 43.1, 43.3, 43.5, 43.7. Однако эти теоремы оказываются для задачи (49.5) бесполезными, так как их утверждения справедливы для значений μ, меньших μ_*. Значение μ_* неизвестно, а значение малого параметра

в (49.5) фиксировано. Отметим, что условия теорем 43.4 и 43.8 также выполняются, однако эти теоремы слабее, чем теоремы 43.3, 43.7, и поэтому не рассматриваются.

Задача (49.5) удовлетворяет условиям теоремы 43.9 при любых значениях $\mu_* > 0$, $T > 0$. Поэтому для заданного μ найдется такое значение $t_* > 0$, что на множестве $0 \leqslant t < t_*$: 1) решение задачи (49.5) существует и единственно; 2) ряд, построенный методом двух параметров, сходится к решению задачи (49.5). Однако построить ряд целиком не представляется возможным. Найдем лишь первый член (порядка нулевой степени ε). Для этого рассмотрим следующую задачу с двумя малыми параметрами:

$$\begin{gathered}
\frac{dw_1}{dt} = w_3, \quad \frac{dw_2}{dt} = w_4, \\
\mu\frac{dw_3}{dt} = -a_1 w_3 - \cos(\beta^\circ + \varepsilon w_2) w_4, \\
\mu\frac{dw_4}{dt} = \cos(\beta^\circ + \varepsilon w_2) w_3 - a_2 w_4, \\
w_i\,|_{t=0} = 0, \quad i = 1, 2, 4, \quad w_3\,|_{t=0} = 1.
\end{gathered} \tag{52.1}$$

Сравнивая задачи (49.5), (52.1), получаем:

$$\xi_i = w_i\,|_{\varepsilon=\mu}, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Будем искать решение задачи (52.1) в виде

$$w_i = w_i^{(0)}(t) + \varepsilon w_i^{(1)}(t) + \ldots, \quad i = \overline{1, 4}. \tag{52.2}$$

При этом предполагаем, что a_1, a_2, β°, μ от ε не зависят. Подставим ряды (52.2) в уравнения (52.1), разложим левые и правые части уравнений в ряды по степеням ε и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим следующие уравнения для функций $w_i^{(k)}(t)$ при $k = 0$:

$$\begin{gathered}
\frac{dw_1^{(0)}}{dt} = w_3^{(0)}, \quad \frac{dw_2^{(0)}}{dt} = w_4^{(0)}, \\
\mu\frac{dw_3^{(0)}}{dt} = -a_1 w_3^{(0)} - \cos\beta^\circ w_4^{(0)}, \quad \mu\frac{dw_4^{(0)}}{dt} = \cos\beta^\circ w_3^{(0)} - a_2 w_4^{(0)}, \\
w_i^{(0)}(0) = 0, \quad i = 1, 2, 4, \quad w_3^{(0)}(0) = 1.
\end{gathered}$$

Решение задачи имеет вид

$$\begin{gathered}
w_1^{(0)} = \mu e^{-\delta\tau}(b_3\cos\omega\tau + b_4\sin\omega\tau) - b_3\mu, \\
w_2^{(0)} = \mu e^{-\delta\tau}(b_5\cos\omega\tau + b_6\sin\omega\tau) - b_5\mu, \\
w_3^{(0)} = e^{-\delta\tau}(\cos\omega\tau + b_1\sin\omega\tau), \quad w_4^{(0)} = b_2 e^{-\delta\tau}\sin\omega\tau, \quad \tau = \frac{t}{\mu},
\end{gathered} \tag{52.3}$$

где δ, ω, b_i задаются формулами (50.5). Отсюда и из (50.7) следует, что

$$w_i^{(0)} = \xi_{1i}, \quad i = \overline{1,4}.$$

Таким образом, нулевое приближение решения задачи (49.5), полученное методом двух параметров, совпадает с первым приближением решения этой задачи, полученным методом пограничных функций. Оценка точности этого приближения рассмотрена в п. 50.3. Таким образом, для размерных переменных результаты, полученные методом двух параметров, совпадают с результатами п. 50.4.

§ 53. Модификация метода двух параметров

В асимптотике (52.2) решения задачи (52.1) есть секулярные члены (порядка ε^k, $k \geqslant 1$) — слагаемые, содержащие множителем независимую переменную t. Чтобы исключить эти слагаемые (и тем самым улучшить оценку точности приближенного решения), будем рассматривать β° в (52.1) как гладкую функцию ε. Ограничиваясь в асимптотике слагаемыми порядка $\varepsilon^0 = 1$, положим

$$\beta^\circ = \widetilde{\gamma}_0 + \varepsilon\widetilde{\Delta\gamma}, \tag{53.1}$$

где $\widetilde{\gamma}_0$ — искомая постоянная, не зависящая от t, ε; $\widetilde{\Delta\gamma}$ — искомая гладкая функция ε. Решение задачи (52.1), (53.1) ищем в виде

$$w_i = \widetilde{w}_i^{(0)}(t) + \varepsilon\widetilde{w}_i^{(1)}(t) + \ldots.$$

Для $\widetilde{w}_i^{(0)}$ имеем

$$\frac{d\widetilde{w}_1^{(0)}}{dt} = \widetilde{w}_3^{(0)}, \quad \frac{d\widetilde{w}_2^{(0)}}{dt} = \widetilde{w}_4^{(0)},$$
$$\mu\frac{d\widetilde{w}_3^{(0)}}{dt} = -a_1\widetilde{w}_3^{(0)} - \cos\gamma_0\widetilde{w}_4^{(0)}, \quad \mu\frac{d\widetilde{w}_4^{(0)}}{dt} = \cos\gamma_0\widetilde{w}_3^{(0)} - a_2\widetilde{w}_4^{(0)},$$
$$\widetilde{w}_i^{(0)}(0) = 0, \quad i = 1,2,4, \quad \widetilde{w}_4^{(0)}(0) = 1.$$

Решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}_1^{(0)} &= \mu e^{-\delta\tau}(c_3\cos\widetilde{\omega}\tau + c_4\sin\widetilde{\omega}\tau) - c_3\mu,\\
\widetilde{w}_2^{(0)} &= \mu e^{-\delta\tau}(c_5\cos\widetilde{\omega}\tau + c_6\sin\widetilde{\omega}\tau) - c_5\mu,
\end{aligned} \tag{53.2}$$
$$\widetilde{w}_3^{(0)} = e^{-\delta\tau}(\cos\widetilde{\omega}\tau + c_1\sin\widetilde{\omega}\tau), \quad \widetilde{w}_4^{(0)} = c_2e^{-\delta\tau}\sin\widetilde{\omega}\tau, \quad \tau = \frac{t}{\mu},$$

где δ, $\widetilde{\omega}$, c_i задаются формулами (51.4). Отсюда и из (51.6) следует:

$$\widetilde{w}_i^{(0)} = \widetilde{\xi}_i, \quad i = \overline{1,4}.$$

В формулах (53.2) нет секулярных членов, поэтому на данном шаге приближенного интегрирования $\widetilde{\gamma}_0$, $\widetilde{\Delta\gamma}$ остаются неизвестными. Уравнения для них получим, рассматривая остаточный член

$$u = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4), \quad \zeta_i = \left[w_i - \widetilde{w}_i^{(0)}\right]_{\varepsilon=\mu} = \xi_i - \widetilde{\xi}_i.$$

Исследование остаточного члена проведено в п. 51.2. Из него следует: $\widetilde{\gamma}_0 = \gamma_0$, $\widetilde{\Delta\gamma} = 0$, уравнение для γ_0 имеет вид (51.9). Таким образом, результаты, полученные модифицированным методом двух параметров, совпадают с результатами п. 51.3.

§ 54. Применение второго метода Ляпунова

54.1. Применение теоремы 28.6 к задаче (49.5)

Решение задачи (49.5) можно оценить, используя второй метод Ляпунова из п. 28.3. Для этого рассмотрим функцию Ляпунова

$$\Lambda = \frac{\xi_3^2 + \xi_4^2}{2}. \tag{54.1}$$

Найдем производную этой функции в силу системы (49.5):

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \xi_3 \frac{d\xi_3}{dt} + \xi_4 \frac{d\xi_4}{dt} = -\mu^{-1}(a_1\xi_3^2 + a_2\xi_4^2). \tag{54.2}$$

Обозначим $\widetilde{x} = (\xi_3, \xi_4)$. Тогда при $\|\widetilde{x}\| = d$ справедливы соотношения

$$\Lambda \geqslant \frac{1}{2}\max{}^2\{|\,\xi_3\,|, |\,\xi_4\,|\} = \frac{\|\widetilde{x}\|^2}{2} = \frac{d^2}{2}.$$

Поэтому при $\delta = d$, $\rho = d^2/2$ и любых $d > 0$, $\bar{\mu} > 0$ задача (49.5) и функция (54.1) удовлетворяют условиям теоремы 28.6. Множество (28.14) для задачи (49.5) имеет вид

$$0 < \mu \leqslant \bar{\mu}, \quad d > 1, \quad \rho > \frac{1}{2}.$$

Поэтому для любых значений μ, $d > 1$ решение задачи (49.5) существует, единственно и удовлетворяет неравенствам

$$|\,\xi_3(t,\mu)\,| < d, \quad |\,\xi_4(t,\mu)\,| < d$$

при $0 \leqslant t \leqslant t_*$, $t < \infty$, $t_* = t_*(\mu) > 0$. Из (28.15) следует неравенство $(\xi_3^2 + \xi_4^2)/2 \leqslant 1/2$. Поэтому

$$\xi_3^2 + \xi_4^2 \leqslant 1, \quad |\xi_3| \leqslant 1, \quad |\xi_4| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_*.$$

Таким образом, теорема 28.6 гарантирует наличие ненулевого интервала существования для решения задачи (49.5) и дает на нем оценку функций ξ_3, ξ_4.

54.2. Существование решения на полуоси $t \geqslant 0$

Из (54.2) следуют неравенства

$$\frac{d\Lambda}{dt} \leqslant -\mu^{-1}\min\{a_1, a_2\}\cdot(\xi_3^2+\xi_4^2) = -2K_0\Lambda,$$
$$K_0 = \mu^{-1}\min\{a_1, a_2\}, \quad \Lambda \leqslant \Lambda^\circ \exp\{-2K_0 t\}. \tag{54.3}$$

Здесь Λ° — значение Λ при $t = 0$, $\Lambda^\circ = 1/2$. Из (49.5), (54.1), (54.3) следует: если решение задачи (49.5) существует на отрезке $[0, t]$, то справедливы соотношения

$$|\,\xi_i\,| \leqslant \sqrt{2\Lambda} \leqslant \exp\{-K_0 t\}, \quad i = 3, 4, \quad \xi_j = \int\limits_0^t \xi_{j+2}(s)\,ds,$$
$$|\,\xi_j\,| \leqslant \int\limits_0^t |\,\xi_{j+2}(s)\,|\,ds \leqslant K_0^{-1}\left[1-\exp\{-K_0 t\}\right], \tag{54.4}$$
$$j = 1, 2.$$

Из теоремы о существовании и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений [4] следует: найдется такое значение $t_0 > 0$, что: 1) при $0 \leqslant t < t_0$ решение задачи (49.5) существует, единственно и непрерывно, 2) если $t_0 < \infty$, то $\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t,\, i=\overline{1,4}} |\xi_i(s)| \to \infty$ при $t \to t_0$ (иначе решение можно было бы продолжить). Из (54.4) следует, что функции $\xi_i(t)$ ограничены. Поэтому $t_0 = \infty$. Переходя к размерным переменным по формулам (49.3), получим следующие результаты.

54.3. Результаты

А. Решение задачи (49.1), (49.2) существует и единственно при $\mathrm{T} \geqslant 0$.

Б. При $\mathrm{T} \geqslant 0$ справедливы неравенства

$$|\alpha - \alpha^\circ| \leqslant \frac{\Omega_\alpha^\circ}{K}\left(1 - e^{-K\mathrm{T}}\right),$$
$$|\beta - \beta^\circ| \leqslant \frac{\Omega_\alpha^\circ}{K}\sqrt{\frac{A + A_1 + A_2}{A + B_1}}\left(1 - e^{-K\mathrm{T}}\right),$$
$$\left|\frac{d\alpha}{d\mathrm{T}}\right| \leqslant \Omega_\alpha^\circ e^{-K\mathrm{T}}, \quad \left|\frac{d\beta}{d\mathrm{T}}\right| \leqslant \Omega_\alpha^\circ\sqrt{\frac{A + A_1 + A_2}{A + B_1}}e^{-K\mathrm{T}}, \tag{54.5}$$
$$K = \min\left\{\frac{n_1}{A + A_1 + A_2}, \frac{n_2}{A + B_1}\right\} \approx 394\text{c}^{-1}.$$

в. При $0 \leqslant \mathrm{T} \leqslant 15$ с справедливы оценки

$$
\begin{aligned}
&|\alpha - \alpha^\circ| \leqslant 1{,}747', \qquad &|\beta - \beta^\circ| \leqslant 3{,}037',\\
&\left|\frac{d\alpha}{d\mathrm{T}}\right| \leqslant 0{,}2\text{с}^{-1}, \qquad &\left|\frac{d\beta}{d\mathrm{T}}\right| \leqslant 0{,}348\text{с}^{-1}.
\end{aligned} \tag{54.6}
$$

Неравенства (54.6) следуют из (54.5) при подстановке численных значений (49.2).

§ 55. Соединение метода пограничных функций и метода двух параметров со вторым методом Ляпунова

55.1. Улучшение оценки асимптотического решения (51.6)

Из результатов § 54 и из формул (51.6), (51.7), (54.4) следует, что решение задачи (49.5) существует на всей полуоси $t \geqslant 0$ и удовлетворяет следующим соотношениям:

$$
u = x - \widetilde{X}, \quad u = (\zeta_1, \ldots, \zeta_4), \quad |\zeta_i| = |\xi_i - \widetilde{\xi}_i| \leqslant |\xi_i| + |\widetilde{\xi}_i|, \quad i = \overline{1,4},
$$

$$
|\zeta_1| \leqslant K_0^{-1}\left[1 - \exp\{-K_0 t\}\right] + \left|\mu \exp\{-\delta\tau\}(c_3 \cos\widetilde{\omega}\tau + c_4 \sin\widetilde{\omega}\tau) - c_3\mu\right| \leqslant
$$

$$
\leqslant K_0^{-1} + |c_3|\mu + \mu\sqrt{c_3^2 + c_4^2}\exp\{-\delta\tau\},
$$

$$
|\zeta_2| \leqslant K_0^{-1}\left[1 - \exp\{-K_0 t\}\right] + \left|\mu \exp\{-\delta\tau\}(c_5 \cos\widetilde{\omega}\tau + c_6 \sin\widetilde{\omega}\tau) - c_5\mu\right| \leqslant
$$

$$
\leqslant K_0^{-1} + |c_5|\mu + \mu\sqrt{c_5^2 + c_6^2}\exp\{-\delta\tau\},
$$

$$
|\zeta_3| \leqslant \exp\{-K_0 t\} + \left|\exp\{-\delta\tau\}(\cos\widetilde{\omega}\tau + c_1 \sin\widetilde{\omega}\tau)\right| \leqslant
$$

$$
\leqslant \exp\{-\delta_0\tau\} + \sqrt{1 + c_1^2}\exp\{-\delta\tau\},
$$

$$
|\zeta_4| \leqslant \exp\{-K_0 t\} + \left|c_2 \exp\{-\delta\tau\}\sin\widetilde{\omega}\tau\right| \leqslant \exp\{-\delta_0\tau\} + c_2\exp\{-\delta\tau\},
$$

где

$$
K_0 \equiv \mu^{-1}\min\{a_1, a_2\}, \quad \delta_0 \equiv \min\left\{a_1, a_2, \frac{\delta}{2}\right\}. \tag{55.1}
$$

Таким образом, при $n = 1$, $t \geqslant 0$ справедливы неравенства

$$
\begin{gathered}
|\zeta_i(t)| \leqslant P_{i0}^{(n-1)} + P_{i1}^{(n-1)}\exp\{-\delta_0\tau\} + P_{i2}^{(n-1)}\exp\{-\delta\tau\},\\
|\zeta_j(t)| \leqslant P_{j1}^{(n-1)}\exp\{-\delta_0\tau\} + P_{j2}^{(n-1)}\exp\{-\delta\tau\},\\
i = 1, 2, \quad j = 3, 4, \quad \tau = \frac{t}{\mu},
\end{gathered} \tag{55.2}
$$

где

$$P_{10}^{(0)} = K_0^{-1} + |c_3|\mu, \quad P_{11}^{(0)} = 0, \quad P_{12}^{(0)} = \mu\sqrt{c_3^2 + c_4^2},$$

$$P_{20}^{(0)} = K_0^{-1} + |c_5|\mu, \quad P_{21}^{(0)} = 0, \quad P_{22}^{(0)} = \mu\sqrt{c_5^2 + c_6^2}, \tag{55.3}$$

$$P_{31}^{(0)} = 1, \quad P_{32}^{(0)} = \sqrt{1 + c_1^2}, \quad P_{41}^{(0)} = 1, \quad P_{42}^{(0)} = c_2.$$

Предположим, что для некоторого значения $n \geqslant 1$ при $t \geqslant 0$ справедливы неравенства (55.2). Тогда при $t \geqslant 0$ справедливы неравенства, которые получаются, если в правые части (51.10) вместо $|\zeta_i(t)|$, $|\zeta_j(t)|$ подставить их оценки (55.2). После вычисления интегралов, используя соотношения

$$\exp\{-a\tau\} - \exp\{-b\tau\} \leqslant \exp\{-a\tau\} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant a < b,$$

$$\tau \exp\{-\delta\tau\} \leqslant (\delta - \delta_0)^{-1} \exp\{-1 - \delta_0\tau\},$$

$$\exp\{-2\delta_0\tau\} - \exp\{-\delta\tau\} \leqslant \frac{\delta - 2\delta_0}{\delta_0}\left(\frac{\delta_0}{\delta - \delta_0}\right)^{(\delta-\delta_0)/(\delta-2\delta_0)} e^{-\delta_0\tau},$$

из (51.10) получим неравенства на оси $t \geqslant 0$:

$$|\zeta_i(t)| \leqslant P_{i0}^{(n)} + P_{i1}^{(n)} \exp\{-\delta_0\tau\} + P_{i2}^{(n)} \exp\{-\delta\tau\},$$

$$|\zeta_j(t)| \leqslant P_{j1}^{(n)} \exp\{-\delta_0\tau\} + P_{j2}^{(n)} \exp\{-\delta\tau\}, \tag{55.4}$$

$$i = 1, 2, \quad j = 3, 4, \quad \tau = \frac{t}{\mu}.$$

Здесь

$$P_{i0}^{(n)} = Q_1(q_{i1}, q_{i2}), \quad P_{ik}^{(n)} = \frac{\mu}{\delta^2 + \widetilde{\omega}^2}\left[a_2 P_{3k}^{(n-1)} + \cos\gamma_0 P_{4k}^{(n-1)}\right],$$

$$P_{2k}^{(n)} = \frac{\mu}{\delta^2 + \widetilde{\omega}^2}\left[\cos\gamma_0 P_{3k}^{(n-1)} + a_1 P_{4k}^{(n-1)}\right],$$

$$P_{j1}^{(n)} = Q_2(q_{j1}, q_{j2}), \quad P_{j2}^{(n)} = Q_3(q_{j1}, q_{j2}),$$

$$i = 1, 2, \quad j = 3, 4, \quad k = 1, 2,$$

$$Q_1(q_1, q_2) = P_{20}^{(n-1)}\left(\frac{q_1}{\delta_0} + \frac{q_2}{\delta}\right) + P_{21}^{(n-1)}\left[\frac{q_1}{2\delta_0} + \frac{q_2}{\delta_0 + \delta}\right] + \tag{55.5}$$

$$+ \left[P_{22}^{(n-1)} + \mu\sqrt{c_5^2 + c_6^2}\right]\left[\frac{q_1}{\delta_0 + \delta} + \frac{q_2}{2\delta}\right],$$

$$Q_2(q_1, q_2) = \frac{1}{\delta - \delta_0}\left(q_1 + \frac{q_2}{e}\right)P_{20}^{(n-1)} + q q_1 P_{21}^{(n-1)},$$

$$Q_3(q_1, q_2) = \frac{q_2}{\delta_0} P_{21}^{(n-1)} + \left[P_{22}^{(n-1)} + \mu\sqrt{c_5^2 + c_6^2}\right]\left(\frac{q_1}{\delta_0} + \frac{q_2}{\delta}\right),$$

$$q_{11} = \frac{\mu^2 f_*}{\delta^2 + \widetilde{\omega}^2}\left[\cos\gamma_0 P_{31}^{(n-1)} + a_2 P_{41}^{(n-1)}\right],$$

$$q_{12} = \frac{\mu^2 f_*}{\delta^2 + \widetilde{\omega}^2}\left[\cos\gamma_0 P_{32}^{(n-1)} + a_2 P_{42}^{(n-1)} + \sqrt{\cos^2\gamma_0 + (c_1\cos\gamma_0 + a_2 c_2)^2}\right],$$

$$q_{21} = \frac{\mu^2 f_*}{\delta^2 + \widetilde{\omega}^2}\left[a_1 P_{31}^{(n-1)} + \cos\gamma_0 P_{41}^{(n-1)}\right],$$

$$q_{22} = \frac{\mu^2 f_*}{\delta^2 + \widetilde{\omega}^2}\left[a_1 P_{32}^{(n-1)} + \cos\gamma_0 P_{42}^{(n-1)} + \sqrt{a_1^2 + (a_1 c_1 - c_2\cos\gamma_0)^2}\right],$$

$$q_{31} = \mu f_*\left[c_2 P_{31}^{(n-1)} + \sqrt{1 + c_1^2}\,P_{41}^{(n-1)}\right],$$

$$q_{32} = \mu f_*\left[c_2 P_{32}^{(n-1)} + \sqrt{1 + c_1^2}\,P_{42}^{(n-1)} + c_1 c_2 + c_2\sqrt{1 + c_1^2}\right],$$

$$q_{41} = \mu f_*\left[\sqrt{1 + c_1^2}\,P_{31}^{(n-1)} + c_2 P_{41}^{(n-1)}\right],$$

$$q_{42} = \mu f_*\left[\sqrt{1 + c_1^2}\,P_{32}^{(n-1)} + c_2 P_{42}^{(n-1)} + \frac{1}{2}(1 + c_1^2 + c_2^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sqrt{(1 - c_1^2 - c_2^2)^2 + 4c_1^2}\right],$$

$$q = \begin{cases} [(\delta - \delta_0)e]^{-1} \quad \text{при} \quad \delta = 2\delta_0, \\ (\delta_0)^{-1}[\delta_0/(\delta - \delta_0)]^{(\delta - \delta_0)/(\delta - 2\delta_0)} \quad \text{при} \quad \delta > 2\delta_0, \end{cases}$$

$$f_* = \max_{|\zeta| \leqslant \mu\left[P_{20}^{(n-1)} + P_{21}^{(n-1)} + P_{22}^{(n-1)}\right] + \mu^2\sqrt{c_5^2 + c_6^2}} |\sin(\gamma_0 + \zeta)|.$$

Неравенства (55.4) совпадают с (55.2), если в (55.2) заменить n на $(n+1)$. Таким образом, по индукции получаем: при любом $n \geqslant 0$ на оси $t \geqslant 0$ справедливы неравенства (55.4), где коэффициенты $P_{kl}^{(n)}$ вычисляются по формулам (55.3) при $n = 0$ и по рекуррентным формулам (55.5) при $n \geqslant 1$. Числа δ, $\widetilde{\omega}$, c_k, δ_0, K_0 вычисляются по формулам (51.4), (55.1), γ_0 — корень уравнения (51.9). Вычисляя коэффициенты $P_{kl}^{(n)}$ при $n = 0, 1, \ldots$ и переходя к размерным переменным по формулам (49.3), (51.6), (51.7), получим следующие результаты.

55.2. Результаты

А. Решение задачи (49.1), (49.2) существует при $\mathrm{T} \geqslant 0$ и удовлетворяет неравенствам

$$|\alpha - \widetilde{\alpha}| \leqslant \left(2{,}57 + 8{,}92e^{-\Delta \mathrm{T}}\right) \cdot 10^{-8}, \tag{55.6}$$

$$|\beta - \widetilde{\beta}| \leqslant \left(0{,}26 + 1{,}04e^{-\Delta \mathrm{T}}\right) \cdot 10^{-7},$$

$$\left|\frac{d\alpha}{d\mathrm{T}} - \widetilde{\Omega}_\alpha\right| \leqslant \left(5e^{-\Delta_0 \mathrm{T}} + 70337e^{-\Delta \mathrm{T}}\right) \cdot 10^{-9}\text{с}^{-1},$$

$$\left|\frac{d\beta}{d\mathrm{T}} - \widetilde{\Omega}_\beta\right| \leqslant \left(9e^{-\Delta_0 \mathrm{T}} + 122309e^{-\Delta \mathrm{T}}\right) \cdot 10^{-9}\text{с}^{-1},$$

где $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\Omega}_\alpha$, $\widetilde{\Omega}_\beta$, Δ — функции и параметр в (51.17),

$$\Delta_0 = \min\left[\frac{n_1}{A + A_1 + A_2}, \quad \frac{n_2}{A + B_1}, \quad \frac{\Delta}{2}\right] \approx 393{,}701\text{с}^{-1}. \tag{55.7}$$

Отметим, что в (55.6) использовано неравенство $\exp\{-\Delta_0 \mathrm{T}\} \leqslant 1$.

Б. При $\mathrm{T} \geqslant 0$ справедливы оценки

$$|\alpha - \widetilde{\alpha}| \leqslant 0{,}024'', \quad |\beta - \widetilde{\beta}| \leqslant 0{,}027'', \tag{55.8}$$

$$\left|\frac{d\alpha}{d\mathrm{T}} - \widetilde{\Omega}_\alpha\right| \leqslant 7{,}04 \cdot 10^{-5}\text{с}^{-1}, \quad \left|\frac{d\beta}{d\mathrm{T}} - \widetilde{\Omega}_\beta\right| \leqslant 1{,}23 \cdot 10^{-4}\text{с}^{-1},$$

которые следуют из (55.6).

§ 56. Движение гироскопа в кардановом подвесе и регулярно возмущенная задача Коши

Перейдем от задачи Тихонова к регулярно возмущенной задаче Коши так, как это сделано в § 58. Для этого в уравнениях (49.5) в качестве независимой переменной рассмотрим быстрое время τ. Уравнения примут вид

$$\frac{d\xi_1}{d\tau} = \mu\xi_3, \quad \frac{d\xi_2}{d\tau} = \mu\xi_4, \tag{56.1}$$

$$\frac{d\xi_3}{d\tau} = -a_1\xi_3 - \cos(\beta^\circ + \mu\xi_2)\xi_4, \quad \frac{d\xi_4}{d\tau} = \cos(\beta^\circ + \mu\xi_2)\xi_3 - a_2\xi_4,$$

$$\xi_i\,|_{\tau=0} = 0, \quad i = 1, 2, 4, \quad \xi_3\,|_{\tau=0} = 1.$$

Первое приближение решения задачи (56.1), построенное методом малого параметра Пуанкаре из п. 1.2, имеет вид

$$\xi_1 \approx \xi_{11} = \mu e^{-\delta\tau}(b_3 \cos\omega\tau + b_4 \sin\omega\tau) - b_3\mu, \tag{56.2}$$

$$\xi_2 \approx \xi_{12} = \mu e^{-\delta\tau}(b_5 \cos\omega\tau + b_6 \sin\omega\tau) - b_5\mu,$$

$$\xi_3 \approx \xi_{13} = e^{-\delta\tau}(\cos\omega\tau + b_1 \sin\omega\tau), \quad \xi_4 \approx \xi_{14} = b_2 e^{-\delta\tau} \sin\omega\tau, \quad \tau = \frac{t}{\mu}.$$

Таким образом, первое приближение (56.2) решения задачи (49.5), построенное методом малого параметра Пуанкаре, совпадает с первым приближением (50.7), построенным методом пограничных функций, и с нулевым приближением (52.3), построенным методом двух параметров. Можно модифицировать метод малого параметра Пуанкаре так же, как была сделана модификация метода двух параметров в § 53. Результаты модификации совпадают с результатами двух других модифицированных методов. Оценку точности решения в размерных переменных смотрите в п. 55.2.

Отметим, что задача (56.1) удовлетворяет условиям теорем 58.1, 58.2, из которых следует, что функции (56.2) хорошо приближают решение задачи (56.1) на интервале времени τ порядка μ^{-1} и решение задачи (49.5) на отрезке переменной t. Как следует из п. 55.2, модифицированный метод Пуанкаре дает хорошее приближение решения задачи (56.1) на полуоси $\tau \geqslant 0$ и решения задачи (49.5) на полуоси $t \geqslant 0$.

§ 57. Выводы главы 6

В главе 6 рассмотрена задача о движении гироскопа в кардановом подвесе. В § 49 эта задача приведена к задаче Тихонова.

В § 50, § 51 рассмотрен метод пограничных функций и модифицированный метод пограничных функций. В § 52, § 53 рассмотрен метод двух параметров и модифицированный метод двух параметров. Оба метода — метод пограничных функций и метод двух параметров — дали одинаковые результаты. Модификация этих методов улучшила оценку точности асимптотического решения.

В § 54 рассмотрен второй метод Ляпунова. Доказано существование решения на всей полуоси $T \geqslant 0$.

В § 55 второй метод Ляпунова соединен с модифицированными методами пограничных функций и двух параметров. Получена хорошая оценка точности асимптотического решения на всей полуоси $T \geqslant 0$.

В § 56 сделан переход от задачи Тихонова к регулярно возмущенной задаче Коши заменой независимой переменной t на быстрое время τ. Для построения решения использован метод малого параметра Пуанкаре из § 1. Получились результаты, совпадающие с результатами метода пограничных функций и метода двух параметров.

Глава 7

Дополнение

§ 58. Задача Тихонова и регулярно возмущенная задача Коши

Рассмотрим автономную задачу

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x, \mu), \quad x_1|_{t=0} = x_1^\circ(\mu), \tag{58.1}$$

$$\mu^{K_2} \frac{dx_2}{dt} = F_2(x, \mu), \quad x_2|_{t=0} = x_2^\circ(\mu).$$

Здесь $m = 2$; x_i, F_i, x_i° — N_i-мерные векторы, $i = 1, 2$.

При выполнении соответствующих условий (58.1) — задача Тихонова, и ее решение может быть построено методом пограничных функций и методом двух параметров. В этом параграфе рассмотрим метод малого параметра Пуанкаре. Для этого перейдем к новой независимой переменной — быстрому времени $\tau = t/\varepsilon^{K_2}$ и переобозначим малый параметр: $\varepsilon = \mu$. Получим регулярно возмущенную задачу Коши

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \varepsilon^{K_2} F_1(x, \varepsilon), \quad x_1|_{\tau=0} = x_1^\circ(\varepsilon), \tag{58.2}$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = F_2(x, \varepsilon), \quad x_2|_{\tau=0} = x_2^\circ(\varepsilon).$$

Решение этой задачи, построенное методом малого параметра Пуанкаре, имеет вид

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(\tau)\, \varepsilon^k. \tag{58.3}$$

Если в (58.2) перейти к переменной $\Delta x = x - x^{(0)}(\tau) - x^\circ(\varepsilon) + x^\circ(0)$, то при аналитичности функций F_1, F_2, x° будет справедлива теорема Пуанкаре 9.1, из которой следует: ряд Пуанкаре (58.3) сходится к решению задачи (58.2) на конечном отрезке переменной τ при малых значениях $|\varepsilon|$. Отсюда следует, что ряд

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)}(t\mu^{-K_2})\, \mu^k \tag{58.4}$$

сходится к решению задачи (58.1) на интервале переменной t порядка μ^{K_1} при малых значениях $\mu > 0$. Сформулируем условия, при которых сходимость ряда (58.4) к решению задачи (58.1) имеет место на конечном отрезке t, а сходимость ряда (58.3) к решению задачи (58.2) — на интервале τ порядка ε^{-K_2}.

Условие 58.1. $F_i(0,0) = 0, \ i = 1,2, \ x_1^\circ(0) = 0$.

Этому условию можно удовлетворить переходом от x к новой переменной (смотрите § 26).

Условие 58.2. *Функции* $F_i(x,\mu)$ *аналитичны при* $x \in \mathbf{C}(D_x) \subset \mathbf{C}^N$, $|\mu| \leqslant \bar{\mu}$, $\mu \in \mathbf{C}$, $i = 1,2$.

$\mathbf{C}(D_x)$ — окрестность точки $x = 0$ в $\mathbf{C}^N$. Пересечение $\mathbf{C}(D_x)$ с вещественной плоскостью $\operatorname{Im} x = 0$ совпадает с D_x.

Условие 58.3. *Функции* $x_i^\circ(\mu)$ *аналитичны при* $|\mu| \leqslant \bar{\mu}$, $\mu \in \mathbf{C}$, $i = 1,2$.

Условие 58.4. *Матрица* $H(x,0) \equiv [(\partial F_2/\partial x_2)(x,0)]^{-1}$ *ограничена по норме при* $x \in D_x$.

Условие 58.5. *А. Собственные числа матрицы* $A_{2*} \equiv (\partial F_2/\partial x_2)(0,0)$ *лежат в левой полуплоскости.*

Б. Точка $x_2^\circ(0)$ *принадлежит области влияния* D_{2*} *нулевой точки покоя уравнения*

$$\frac{d r_2}{d\tau} = F_2(0, r_2, 0). \tag{58.5}$$

Здесь функция $F_2(x,\mu)$ представлена как $F_2(x_1, x_2, \mu)$.

Условие 58.6. *Множество* $D_x^{(0)} \equiv \{x\colon x = \theta y_2^{(0)}(\tau), \ \tau \geqslant 0, \ 0 \leqslant \theta \leqslant 1\}$ *принадлежит окрестности* D_x.

Здесь $y_2^{(0)}(\tau) \equiv (0, y_{22}^{(0)}(\tau))$, $y_{22}^{(0)}(\tau)$ — решение уравнения (58.5) с начальным условием $r_2(0) = x_2^\circ(0)$.

Теорема 58.1. *Пусть существует такая постоянная* $\bar{\mu} > 0$, *что выполняются условия* 58.1–58.6. *Тогда для любого* $T > 0$ *найдется постоянная* $\mu_* > 0$, *не зависящая от* t, μ *и такая, что на множестве* $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$: 1) *решение задачи* (58.1) *существует и единственно*; 2) *ряд* (58.4) *сходится равномерно к решению задачи* (58.1).

Теорема 58.2. *Пусть существует такая постоянная* $\bar{\mu} > 0$, *что выполняются условия* 58.1–58.6. *Тогда для любого* $T > 0$ *найдется постоянная* $\varepsilon_* > 0$, *не зависящая от* τ, ε *и такая, что на множестве* $0 \leqslant \tau \leqslant T\varepsilon^{-K_2}$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$: 1) *решение задачи* (58.2) *существует и единственно*; 2) *ряд* (58.3) *сходится равномерно к решению задачи* (58.2).

Замечание 58.1. Примеры 31.7–31.10 удовлетворяют условиям теоремы 58.1. Примеры 31.1, 31.11 удовлетворяет условиям теоремы 58.1, если вместо x_1 ввести переменную $\Delta x_1 \equiv x_1 - x_1^\circ e^t$, $\Delta x_1 \equiv x_1 - x_1^\circ$ соответственно. Пример 31.4 удовлетворяет условиям теоремы 58.1 при $|x_2^\circ| < \pi$.

Замечание 58.2. Ряды (58.3), (58.4) могут быть как асимптотическими (пример 58.2), так и не асимптотическими (пример 58.1).

Замечание 58.3. Метод доказательства теорем 58.1, 58.2 в § 59 основан на построении для (58.3) мажорирующего ряда, равномерно сходящегося на множестве $0 \leqslant \tau \leqslant T/\varepsilon^{K_2}$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$. Как показывает пример 58.3, при $m > 2$ такие мажоранты, вообще говоря, не существуют. Поэтому распространить теоремы 58.1, 58.2 на случай $m > 2$ предложенным в § 59 методом нельзя.

Пример 58.1. Рассмотрим задачу

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + \mu, \quad x_1|_{t=0} = 0, \tag{58.6}$$

$$\mu\,\frac{dx_2}{dt} = -x_2, \quad x_2|_{t=0} = 1.$$

Перейдем к быстрому времени $\tau = t/\varepsilon$ и к параметру $\varepsilon = \mu$:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2, \quad x_1|_{\tau=0} = 0, \tag{58.7}$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = -x_2, \quad x_2|_{\tau=0} = 1.$$

Нетрудно проверить, что условия теорем 58.1, 58.2 для задач (58.6), (58.7) выполняются при любом $\bar{\mu} > 0$. Решение задачи (58.7) в виде степенного ряда по ε имеет вид

$$x_1 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tau^{k-1}\varepsilon^k}{(k-1)!}, \quad x_2 = e^{-\tau}. \tag{58.8}$$

Переходя к переменной t и параметру μ, получим

$$x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\,\mu, \quad x_2 = \exp\left\{-\frac{t}{\mu}\right\}. \tag{58.9}$$

Ряд (58.9) сходится равномерно к решению

$$x_1 = \mu\, e^t - \mu, \quad x_2 = \exp\left\{-\frac{t}{\mu}\right\}$$

задачи (58.6) на множестве $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$ при любых $T > 0$, $\mu_* > 0$. При этом ряд (58.9) не является асимптотическим на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ при $\mu \to 0$, так как $x = X_n(t,\mu) + O(\psi_n)$, $\psi_n = \mu$, $\lim\limits_{\mu\to 0+0} \psi_{n+1}/\psi_n = 1 \neq 0$. Здесь X_n — частичная сумма ряда (58.9).

Ряд (58.8) сходится равномерно к решению

$$x_1 = \varepsilon\, e^{\tau\varepsilon} - \varepsilon, \quad x_2 = e^{-\tau}$$

задачи (58.7) на множестве $0 \leqslant \tau \leqslant T/\varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ при любых $T > 0$, $\varepsilon_* > 0$. При этом ряд (58.8) не является асимптотическим на множестве $0 \leqslant \tau \leqslant T/\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$, так как $x = X_n'(\tau,\varepsilon) + O(\psi_n')$, $\psi_n' = \varepsilon$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \psi_{n+1}'/\psi_n' = 1 \neq 0$. Здесь X_n' — частичная сумма ряда (58.8).

Пример 58.2. Рассмотрим задачу

$$\frac{dx_1}{dt} = \mu x_1 + \mu, \quad x_1|_{t=0} = 0, \tag{58.10}$$

$$\mu\,\frac{dx_2}{dt} = -x_2, \quad x_2|_{t=0} = 1.$$

Перейдем к быстрому времени $\tau = t/\varepsilon$ и параметру $\varepsilon = \mu$:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^2, \quad x_1|_{\tau=0} = 0, \tag{58.11}$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = -x_2, \quad x_2|_{\tau=0} = 1.$$

Нетрудно проверить, что условия теорем 58.1, 58.2 для задач (58.10), (58.11) выполняются при любом $\bar{\mu} > 0$. Построим решение в виде степенного ряда по ε:

$$x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\tau\varepsilon^2)^k}{k!}, \quad x_2 = e^{-\tau}. \tag{58.12}$$

Вернемся к переменной t и параметру μ:

$$x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t\mu)^k}{k!}, \quad x_2 = \exp\left\{-\frac{t}{\mu}\right\}. \tag{58.13}$$

Ряд (58.13) сходится равномерно к решению

$$x_1 = e^{t\mu} - 1, \quad x_2 = e^{-t/\mu}$$

задачи (58.10) на множестве $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$ при любых $T > 0$, $\mu_* > 0$. При этом ряд (58.13) является асимптотическим на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ при $\mu \to 0$:

$$x = X_n(t, \mu) + O(\mu^{n+1}).$$

Здесь $X_n(t, \mu)$ — частичная сумма ряда (58.13).

Ряд (58.12) сходится равномерно к решению

$$x_1 = \exp\left\{\tau\varepsilon^2\right\} - 1, \quad x_2 = \exp\{-\tau\}$$

задачи (58.11) на множестве $0 \leqslant \tau \leqslant T/\varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ при любых $T > 0$, $\varepsilon_* > 0$. При этом ряд (58.12) является асимптотическим на множестве $0 \leqslant \tau \leqslant T/\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$:

$$x = X'_n(\tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Здесь $X'_n(\tau, \varepsilon)$ — частичная сумма ряда (58.12).

Пример 58.3. Рассмотрим задачу

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + \mu, \quad x_1|_{t=0} = 0, \tag{58.14}$$

$$\mu\,\frac{dx_2}{dt} = -x_2, \quad x_2|_{t=0} = 1,$$

$$\mu^2\,\frac{dx_3}{dt} = -x_3, \quad x_3|_{t=0} = 1.$$

Перейдем к быстрому времени $\tau = t/\varepsilon^2$ и параметру $\varepsilon = \mu$:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^3, \quad x_1|_{\tau=0} = 0, \tag{58.15}$$
$$\frac{dx_2}{d\tau} = -\varepsilon x_2, \quad x_2|_{\tau=0} = 1,$$
$$\frac{dx_3}{d\tau} = -x_3, \quad x_3|_{\tau=0} = 1.$$

Получили регулярно возмущенную задачу Коши. Построим степенные ряды для решения задачи (58.15):

$$x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^k \varepsilon^{2k+1}}{k!}, \quad x_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\tau\varepsilon)^k}{k!}, \quad x_3 = e^{-\tau}. \tag{58.16}$$

Вернемся к переменной t и параметру μ:

$$x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\,\mu, \quad x_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k \mu^{-k}}{k!}, \quad x_3 = \exp\left\{-t\mu^{-2}\right\}. \tag{58.17}$$

На множестве $t \geqslant 0$, $\mu > 0$ ряды (58.17) сходятся к решению задачи (58.14):

$$x_1 = \mu e^t - \mu, \quad x_2 = e^{-t/\mu}, \quad x_3 = \exp\left\{-t\mu^{-2}\right\}.$$

Для ряда x_2 в (58.16) не существует мажорирующего ряда, равномерно сходящегося на множестве $0 \leqslant \tau \leqslant T\varepsilon^{-2}$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \mu_*$. Поэтому распространение теорем 58.1, 58.2 на случай $m > 2$ предложенным в § 59 методом невозможно (смотрите замечание 58.3).

§ 59. Доказательство теорем 58.1, 58.2

59.1. Существование и единственность решения

Нетрудно проверить, что при выполнении условий 58.1–58.6, при любых $T > 0$, $n \geqslant 0$ и $y_1^{(0)}(t) = 0$ для задачи (58.1) справедлива теорема 28.1. Поэтому найдутся $\mu'_* > 0$, C_*: 1) не зависящие от t, μ и такие, что при $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu'_*$ решение задачи (58.1) существует, единственно и удовлетворяет неравенству $\|x - X_0^l(t,\mu)\| \leqslant C_*\mu$, 2) не зависящие от τ, ε и такие, что при $0 \leqslant \tau \leqslant T\varepsilon^{-K_2}$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \mu'_*$ решение задачи (58.2) существует, единственно и удовлетворяет неравенству $\|x - X_0(\tau)\| \leqslant C_*\varepsilon$. Здесь

$$X_0^l(t,\mu) = \sum_{j=1}^{2} y_j^{(0)}(\tau_j) = y_2^{(0)}(\tau) = x^{(0)}(\tau) = X_0(\tau), \tag{59.1}$$

$x^{(0)}(\tau)$ — нулевое приближение решения задачи (58.2), $x^{(0)}(\tau) = (0, x_2^{(0)}(\tau))$. $X_0(\tau)$, $X_0^l(t,\mu)$ — первые члены рядов (58.3), (58.4).

59.2. Введение вспомогательной переменной

Положим

$$u \equiv x - X_0(\tau) - x^\circ(\mu) + x^\circ(0). \tag{59.2}$$

Тогда из (58.1), (58.2) следует, что u является решением следующей задачи Коши:

$$\mu^{K_i} \frac{du_i}{dt} = B_i(\tau)\, u + G_i(u, \tau, \mu), \quad i = 1, 2, \quad u|_{t=0} = 0, \tag{59.3}$$

$$B_i(\tau) \equiv F_{ix}(X_0(\tau), 0), \quad K_1 = 0,$$

$$G_1(u,\tau,\mu) \equiv F_1\big(u + X_0(\tau) + x^\circ(\mu) - x^\circ(0), \mu\big) - F_{1x}\big(X_0(\tau), 0\big)u,$$

$$G_2(u,\tau,\mu) \equiv F_2\big(u + X_0(\tau) + x^\circ(\mu) - x^\circ(0), \mu\big) - F_2\big(X_0(\tau), 0\big) - F_{2x}\big(X_0(\tau), 0\big)u.$$

Так же, как был сделан переход от задачи (28.6) к (29.10), перейдем от (59.3) к интегральным уравнениям. Интегрирование по t заменим интегрированием по τ. Параметр μ заменим на ε. Получим

$$u(\tau, \varepsilon) = H\Big(u(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon\Big), \quad H \equiv (H_1, H_2), \tag{59.4}$$

$$H_1\Big(u(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon\Big) \equiv -\varepsilon^{K_2} P_{12*}(\tau) \cdot u_2(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^{K_2} \int\limits_0^\tau \Big[B_{112}(\tau, \sigma, \varepsilon) \cdot u_2(\sigma, \varepsilon) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{2} P_{11l}(\tau, \sigma, \varepsilon) \cdot G_l\Big(u(\sigma, \varepsilon), \sigma, \varepsilon\Big)\Big] d\sigma,$$

$$H_2\Big(u(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon\Big) \equiv \varepsilon^{K_2} \int\limits_0^\tau \Big[B_{222}(\tau, \sigma, \varepsilon) \cdot u_2(\sigma, \varepsilon) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{2} P_{22l}(\tau, \sigma, \varepsilon) \cdot G_l\Big(u(\sigma, \varepsilon), \sigma, \varepsilon\Big)\Big] d\sigma.$$

Из (28.7), (59.3) следуют формулы

$$B_{11*}(\tau) = \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1} \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right] \Big(X_0(\tau), 0\Big), \tag{59.5}$$

$$B_{2l*}(\tau) = \frac{\partial F_2}{\partial x_l} \Big(X_0(\tau), 0\Big), \quad l = 1, 2,$$

$$P_{12*}(\tau) = -\left[\frac{\partial F_1}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1}\right] \Big(X_0(\tau), 0\Big),$$

$$B_{112}(\tau,\sigma,\varepsilon) = -V_1(\tau,\sigma,\varepsilon)\left[\varepsilon^{K_2} B_{11*}(\sigma)\cdot P_{12*}(\sigma) - \frac{dP_{12*}(\sigma)}{d\sigma}\right],$$

$$B_{222}(\tau,\sigma,\varepsilon) = -V_2(\tau,\sigma)\cdot B_{21*}(\sigma)\cdot P_{12*}(\sigma) +$$

$$+\int_\sigma^\tau V_2(\tau,\rho)\cdot B_{21*}(\rho)\cdot B_{112}(\rho,\sigma,\varepsilon)\,d\rho,$$

$$P_{111}(\tau,\sigma,\varepsilon) = V_1(\tau,\sigma,\varepsilon),\quad P_{112}(\tau,\sigma,\varepsilon) = V_1(\tau,\sigma,\varepsilon)\cdot P_{12*}(\sigma),$$

$$P_{221}(\tau,\sigma,\varepsilon) = \int_\sigma^\tau V_2(\tau,\rho)\cdot B_{21*}(\rho)\cdot V_1(\rho,\sigma,\varepsilon)\,d\rho,$$

$$P_{222}(\tau,\sigma,\varepsilon) = \varepsilon^{-K_2} V_2(\tau,\sigma) + \int_\sigma^\tau V_2(\tau,\rho)\cdot B_{21*}(\rho)\cdot P_{112}(\rho,\sigma,\varepsilon)\,d\rho,$$

$V_1(\tau,\sigma,\varepsilon)$ — матрица Коши системы

$$\frac{dr_1}{d\tau} = \varepsilon^{K_2} B_{11*}(\tau)\, r_1, \tag{59.6}$$

$V_2(\tau,\sigma)$ — матрица Коши системы

$$\frac{dr_2}{d\tau} = B_{22*}(\tau)\, r_2.$$

Задача (59.3) эквивалентна задаче (59.4). Построим ряд

$$u(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)}(\tau)\,\varepsilon^k \tag{59.7}$$

по формулам

$$u^{(0)}(\tau) = 0,\quad u^{(k)}(\tau) = \left[H\Big(\sum_{l=0}^{k-1} u^{(l)}(\tau)\,\varepsilon^l, \tau, \varepsilon\Big)\right]^{(k)}. \tag{59.8}$$

Чтобы найти мажоранту ряда (59.7), сделаем предварительно некоторые оценки.

59.3. Функции G_i

Из леммы 33.1 и из (59.1) следует, что при $\tau \geqslant 0$ функция $X_0(\tau)$ существует, единственна, имеет производные любого порядка и удовлетворяет неравенствам

$$\|X_0(\tau)\| = \|y_2^{(0)}(\tau)\| \leqslant C\,e^{-\kappa\tau},\quad \left\|\frac{dX_0(\tau)}{d\tau}\right\| \leqslant C\,e^{-\kappa\tau}, \tag{59.9}$$

где C, κ — некоторые положительные постоянные. Из (59.3) и условия 58.1 получим формулы

$$G_i(u,\tau,\varepsilon) = \Big[F_i\Big(u+X_0(\tau)+x^\circ(\varepsilon)-x^\circ(0),\varepsilon\Big)-F_i\Big(u+X_0(\tau),0\Big)\Big]+ \quad (59.10)$$

$$+\Big[F_i\Big(u+X_0(\tau),0\Big)-F_i\Big(X_0(\tau),0\Big)-F_{ix}\Big(X_0(\tau),0\Big)\,u\Big]+$$

$$+\Big[F_i\Big(X_0(\tau),0\Big)-F_i(0,0)\Big]_{(i=1)},$$

$$G_i(u,\tau,\varepsilon) = \int\limits_0^1 \left[F_{ix}(Y_1,\theta\varepsilon)\int\limits_0^1 x^\circ_\mu(\theta_1\varepsilon)d\theta_1 + F_{i\mu}(Y_1,\theta\varepsilon)\right]d\theta\,\varepsilon\,+$$

$$+\int\limits_0^1\int\limits_0^1\sum_{d=1}^N \frac{\partial^2 F_i}{\partial x\partial x_d}(Y_2,0)\,\theta u u_d\,d\theta_1 d\theta + \int\limits_0^1 F_{ix}\Big(\theta X_0(\tau),0\Big)d\theta\,X_0(\tau)_{(i=1)},$$

$$Y_1\equiv u+X_0(\tau)+\theta x^\circ(\varepsilon)-\theta x^\circ(0),\quad Y_2\equiv\theta\theta_1 u+X_0(\tau),\quad i=1,2.$$

Из (59.9) и условий 58.2, 58.3, 58.6 следует: найдутся такие значения $\delta>0$, μ_1, $0<\mu_1\leqslant\mu'_*$, что при $\|u\|\leqslant\delta$, $|\varepsilon|\leqslant\mu_1$, $u\in\mathbf{C}^N$, $\varepsilon\in\mathbf{C}$ подынтегральные функции в (59.10) аналитичны по u, ε. Поэтому при $\|u\|\leqslant\delta$, $\tau\geqslant 0$, $|\varepsilon|\leqslant\mu_1$ функции $G_i(u,\tau,\varepsilon)$ аналитичны по u, ε и, значит, разлагаются в сходящиеся ряды по степеням u, ε.

Чтобы построить мажорирующие ряды для G_i, представим подынтегральные функции в (59.10) по интегральной формуле Коши (3.2) в виде интегралов по контурам $|u_1|=\delta,\ldots,|u_N|=\delta$, $|\varepsilon|=\mu_1$. Так как производные F_i, x° на этих контурах ограничены по норме, то отсюда получим мажорирующие ряды для функций G_i:

$$G_i(u,\tau,\varepsilon)\ll\left\{\frac{C_2}{\delta-u_1-\ldots-u_N}\left[(u_1+\ldots+u_N)^2+\frac{\varepsilon}{\mu_1-\varepsilon}\right]+\right. \quad (59.11)$$

$$\left.+C_3\,e^{-\kappa\tau}{}_{(i=1)}\right\}(\arg u,\varepsilon),\quad \tau\geqslant 0,\quad i=1,2.$$

Здесь постоянные не зависят от u, τ, ε. Для $X_0(\tau)$ была использована оценка (59.9).

59.4. Матрица V_1

По определению матрицы Коши $V_1(\tau;\sigma,\varepsilon)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial V_1(\tau,\sigma,\varepsilon)}{\partial\tau} = \varepsilon^{K_2}\,B_{11*}(\tau)\cdot V_1(\tau,\sigma,\varepsilon),\quad V_1(\sigma,\sigma,\varepsilon)=E. \qquad (59.12)$$

Из формулы (59.5) для B_{11*}, из непрерывности $X_0(\tau)$ и из условий 58.2, 58.4, 58.6 следует, что при $\tau \geqslant 0$ функция $B_{11*}(\tau)$ непрерывна и

$$\|B_{11*}(\tau)\| \leqslant C_1. \tag{59.13}$$

Отсюда и из теоремы о существовании и единственности решения линейных дифференциальных уравнений [4] следует, что матрица $V_1(\tau,\sigma,\varepsilon)$ существует и единственна при $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau$ и любых значениях ε. Задача (59.12) удовлетворяет условиям теоремы Пуанкаре 9.1, если перейти от V_1 к $V_1' = V_1 - E$. По этой теореме для любого $\tau_* > 0$ найдется такое значение $\varepsilon_* = \varepsilon_*(\tau_*)$, что при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_*$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_*$ матрица V_1 аналитична по ε^{K_2}, т. е. представима в виде сходящегося ряда

$$V_1(\tau,\sigma,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} V_1^{(k)}(\tau,\sigma)\,\varepsilon^{kK_2}. \tag{59.14}$$

Коэффициенты ряда найдем из интегрального уравнения, которому удовлетворяет V_1:

$$V_1(\tau,\sigma,\varepsilon) = E + \varepsilon^{K_2}\int_\sigma^\tau B_{11*}(\rho)\cdot V_1(\rho,\sigma,\varepsilon)\,d\rho.$$

Отсюда

$$V_1^{(0)}(\tau,\sigma) = E, \quad V_1^{(k)}(\tau,\sigma) = \int_\sigma^\tau B_{11*}(\rho)\cdot V_1^{(k-1)}(\rho,\sigma)\,d\rho. \tag{59.15}$$

Покажем, что ряд (59.14) имеет мажоранту:

$$V_1(\tau,\sigma,\varepsilon) \ll \exp\left\{C_1\varepsilon^{K_2}(\tau-\sigma)\right\}(\arg\varepsilon), \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant \tau. \tag{59.16}$$

Для этого предположим, что при $l = \overline{0, k-1}$, $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau$ справедливы неравенства

$$\|V_1^{(l)}(\tau,\sigma)\| \leqslant \frac{C_1^l\,(\tau-\sigma)^l}{l!}. \tag{59.17}$$

Тогда из (59.13), (59.15), (59.17) следует, что

$$\|V_1^{(k)}(\tau,\sigma)\| \leqslant \int_\sigma^\tau \|B_{11*}(\rho)\|\cdot\|V_1^{(k-1)}(\rho,\sigma)\|\,d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \int_\sigma^\tau \frac{C_1^k\,(\rho-\sigma)^{k-1}}{(k-1)!}\,d\rho = \frac{C_1^k(\tau-\sigma)^k}{k!}.$$

Отсюда, используя равенство $\|V_1^{(0)}(\tau,\sigma)\| = 1$, по индукцию получим, что при $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau$ и всех $k \geqslant 0$

$$\|V_1^{(k)}(\tau,\sigma)\| \leqslant \frac{C_1^k\,(\tau-\sigma)^k}{k!}.$$

Таким образом, при $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau$ и любых значениях ε ряд (59.14) сходится и справедливо соотношение (59.16).

59.5. Функции B_{ii2}, P_{iil}

Из леммы 37.1 следует: матрица $V_2(\tau,\sigma)$ существует, единственна, непрерывно дифференцируема и удовлетворяет неравенству

$$\|V_2(\tau,\sigma)\| \leqslant C\exp\{-\kappa_2(\tau-\sigma)\} \tag{59.18}$$

при $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau$ (в лемме 37.1 матрица обозначена $V_2(t,s,\mu)$). Отсюда, из формул (59.5), условий 58.2, 58.4, 58.6 и из аналитичности V_1 следует, что при $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau$ и любых ε функции $B_{ii2}(\tau,\sigma,\varepsilon)$, $P_{iil}(\tau,\sigma,\varepsilon)$ $\big(i = 1,2;\ l = 1,2\big)$ существуют, единственны, непрерывны по совокупности аргументов, аналитичны по ε и, значит, разлагаются в сходящиеся ряды по степеням ε. Чтобы построить для разложений мажорирующие ряды, из (59.5), (59.9) и условий 58.2, 58.4, 58.6 получим соотношения

$$\|B_{21*}(\tau)\| \leqslant C, \quad \|P_{12*}(\tau)\| \leqslant C_4, \tag{59.19}$$

$$\frac{dP_{12}(\tau)}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial F_1(x,0)}{\partial x_2}\left[\frac{\partial F_2(x,0)}{\partial x_2}\right]^{-1}\right\}_{x=X_0(\tau)}\frac{dX_0(\tau)}{d\tau},$$

$$\left\|\frac{dP_{12}(\tau)}{d\tau}\right\| \leqslant C\left\|\frac{dX_0(\tau)}{d\tau}\right\| \leqslant C\,e^{-\kappa\tau}, \quad \tau \geqslant 0.$$

Отсюда и из (59.5), (59.13), (59.16), (59.18) получим мажоранты для функций B_{ii2}, P_{iil}:

$$B_{112}(\tau,\sigma,\varepsilon) \ll \exp\left\{C_1\varepsilon^{K_2}(\tau-\sigma)\right\}\left[C_5\varepsilon^{K_2} + C_6\,e^{-\kappa\sigma}\right]\ (\arg\varepsilon), \tag{59.20}$$

$$B_{222}(\tau,\sigma,\varepsilon) \ll C\exp\{-\kappa_2(\tau-\sigma)\} +$$

$$+\int\limits_\sigma^\tau \exp\left\{-\kappa_2(\tau-\rho) + C_1\varepsilon^{K_2}(\rho-\sigma)\right\}d\rho\left(C\varepsilon^{K_2} + C\,e^{-\kappa\sigma}\right) \ll$$

$$\ll\left[C_7\exp\{-\kappa_2(\tau-\sigma)\} + \exp\left\{C_1\varepsilon^{K_2}(\tau-\sigma)\right\}\left(C_8\varepsilon^{K_2} + C_9\,e^{-\kappa\sigma}\right)\right](\arg\varepsilon),$$

$$P_{111}(\tau,\sigma,\varepsilon) \ll \exp\left\{C_1\varepsilon^{K_2}(\tau-\sigma)\right\}(\arg\varepsilon),$$

$$P_{112}(\tau,\sigma,\varepsilon) \ll C_{10}\exp\left\{C_1\varepsilon^{K_2}(\tau-\sigma)\right\}(\arg\varepsilon),$$

$$P_{221}(\tau,\sigma,\varepsilon) \ll \int\limits_{\sigma}^{\tau} C\exp\left\{-\kappa_2(\tau-\rho)+C_1\varepsilon^{K_2}(\rho-\sigma)\right\}d\rho \ll$$

$$\ll C_{11}\exp\left\{C_1\varepsilon^{K_2}(\tau-\sigma)\right\}(\arg\varepsilon),$$

$$\varepsilon^{K_2}P_{222}(\tau,\sigma,\varepsilon) \ll C\exp\left\{-\kappa_2(\tau-\sigma)\right\}+$$

$$+\varepsilon^{K_2}\int\limits_{\sigma}^{\tau} C\exp\left\{-\kappa_2(\tau-\rho)+C_1\varepsilon^{K_2}(\rho-\sigma)\right\}d\rho \ll$$

$$\ll \left\{C_{12}\exp\left\{-\kappa_2(\tau-\sigma)\right\}+C_{13}\varepsilon^{K_2}\exp\left\{C_1\varepsilon^{K_2}(\tau-\sigma)\right\}\right\}(\arg\varepsilon).$$

59.6. Мажоранта для ряда (59.7)

Рассмотрим функции

$$\widetilde{H}_1(v,\tau,\varepsilon) \equiv C_4\varepsilon^{K_2}(v_1+\ldots+v_N)+ \tag{59.21}$$

$$+\varepsilon^{K_2}(v_1+\ldots+v_N)\int\limits_0^{\tau}\exp\{C_1\varepsilon^{K_2}(\tau-\sigma)\}\left[C_5\varepsilon^{K_2}+C_6\,e^{-\kappa\sigma}\right]d\sigma+$$

$$+C_2\varepsilon^{K_2}\,\widetilde{G}(v,\varepsilon)\,(1+C_{10})\int\limits_0^{\tau}\exp\left\{C_1\varepsilon^{K_2}(\tau-\sigma)\right\}d\sigma+$$

$$+C_3\varepsilon^{K_2}\int\limits_0^{\tau}\exp\left\{C_1\varepsilon^{K_2}(\tau-\sigma)-\kappa\sigma\right\}d\sigma,$$

$$\widetilde{H}_2(v,\tau,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{K_2}(v_1+\ldots+v_N)\int\limits_0^{\tau}\Big[C_7\exp\{-\kappa_2(\tau-\sigma)\}+$$

$$+\exp\left\{C_1\varepsilon^{K_2}(\tau-\sigma)\right\}\left(C_8\varepsilon^{K_2}+C_9\,e^{-\kappa\sigma}\right)\Big]d\sigma+C_2\,\widetilde{G}(v,\varepsilon)\times$$

$$\times\int\limits_0^{\tau}\Big[(C_{11}+C_{13})\,\varepsilon^{K_2}\exp\left\{C_1\varepsilon^{K_2}(\tau-\sigma)\right\}+C_{12}\exp\{-\kappa_2(\tau-\sigma)\}\Big]d\sigma+$$

$$+C_3C_{11}\varepsilon^{K_2}\int\limits_0^{\tau}\exp\left\{C_1\varepsilon^{K_2}(\tau-\sigma)\dot{-}\kappa\sigma\right\}d\sigma,$$

$$\widetilde{G}(v,\varepsilon) \equiv \frac{1}{\delta - v_1 - \ldots - v_N} \left[(v_1 + \ldots + v_N)^2 + \frac{\varepsilon}{\mu_1 - \varepsilon}\right].$$

Из написанных формул нетрудно получить соотношения

$$\widetilde{H}_1(v,\tau,\varepsilon) \ll \left[\varepsilon^{K_2}\,(v_1 + \ldots + v_N)\left[C_4 + C\exp\left\{C_1\tau\varepsilon^{K_2}\right\}\right] + \right. \tag{59.22}$$

$$\left. + C\,\exp\left\{C_1\tau\varepsilon^{K_2}\right\}\,\widetilde{G}(v,\varepsilon) + C\varepsilon^{K_2}\,\exp\left\{C_1\tau\varepsilon^{K_2}\right\}\right](\arg v,\varepsilon),$$

$$\widetilde{H}_2(v,\tau,\varepsilon) \ll \left\{\varepsilon^{K_2}\,(v_1 + \ldots + v_N)\,\left[C + C\,\exp\left\{C_1\tau\varepsilon^{K_2}\right\}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[C\exp\left\{C_1\tau\varepsilon^{K_2}\right\} + C\right]\,\widetilde{G}(v,\varepsilon) + C\varepsilon^{K_2}\,\exp\left\{C_1\tau\varepsilon^{K_2}\right\}\right\}(\arg v,\varepsilon),$$

$$\widetilde{H}(v,\tau,\varepsilon) \ll h(v,\tau,\varepsilon) \equiv \left[C_{14}\,\varepsilon^{K_2}\,(v_1 + \ldots + v_N)\,\exp\left\{C_1\tau\varepsilon^{K_2}\right\} + \right.$$

$$\left. + C_{15}\,\exp\left\{C_1\tau\varepsilon^{K_2}\right\}\,\widetilde{G}(v,\varepsilon)\right](\arg v,\varepsilon), \quad \widetilde{H} \equiv (\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2).$$

Рассмотрим следующую систему уравнений относительно v:

$$v_d = h(v,\tau,\varepsilon), \quad d = \overline{1,N}. \tag{59.23}$$

Эта система имеет два решения

$$v_1 = \ldots = v_N = w,$$

где w — корень квадратного уравнения

$$aw^2 - bw + c = 0$$

с коэффициентами

$$a \equiv N\left[1 + N\,\left(C_{15} - C_{14}\varepsilon^{K_2}\right)\,\exp\left\{C_1\tau\varepsilon^{K_2}\right\}\right], \tag{59.24}$$

$$b \equiv \delta\left[1 - NC_{14}\varepsilon^{K_2}\exp\left\{C_1\tau\varepsilon^{K_2}\right\}\right], \quad c \equiv \varepsilon C_{15}\exp\left\{C_1\tau\varepsilon^{K_2}\right\}\,(\mu_1 - \varepsilon)^{-1}.$$

Рассмотрим решение, обращающееся в ноль при $\varepsilon = 0$:

$$v_1 = \ldots = v_N = \varphi(\tau,\varepsilon), \quad \varphi(\tau,\varepsilon) \equiv \frac{2c}{b + \sqrt{d}}, \quad d \equiv b^2 - 4ac. \tag{59.25}$$

Из (59.24), (59.25) следует, что функция $\varphi(\tau,\varepsilon)$ аналитична по ε при $b + \sqrt{d} \neq 0$, $d \neq 0$, $\varepsilon \neq \mu_1$, $\varepsilon \in \mathbf{C}$. При $|\tau\varepsilon^{K_2}| \leqslant C$ выполняется

неравенство $\left| \exp\{C_1\tau\varepsilon^{K_2}\}\right| \leqslant \exp\{C_1C\}$. Рассматривая φ как функцию двух переменных ε и $\tau\varepsilon^{K_2}$, нетрудно получить: для любого $T' > T$ найдутся такие значения C, μ_2, что $0 < \mu_2 < \mu_1$ и при $\tau \geqslant 0$

$$\varphi(\tau,\varepsilon) \ll \frac{C}{(\mu_2-\varepsilon)\,(T'-\tau\varepsilon^{K_2})}\ (\arg\varepsilon).$$

Поэтому для любого значения μ_*, $0 < \mu_* < \mu_2$, функция $\varphi(\tau,\varepsilon)$ аналитична по ε и разлагается в ряд

$$v(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{(k)}(\tau)\,\varepsilon^k, \tag{59.26}$$

сходящийся равномерно на множестве

$$\tau \geqslant 0, \quad |\varepsilon| \leqslant \min\{\mu_*, (T/\tau)^{1/K_2}\}, \tag{59.27}$$

а, значит, и на множестве

$$0 \leqslant \tau \leqslant T\varepsilon^{-K_2}, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \mu_*. \tag{59.28}$$

Коэффициенты ряда (59.26) можно получить из (59.22), (59.23):

$$v_d^{(0)}(\tau) = 0, \quad v_d^{(k)}(\tau) = \left[h\left(\sum_{l=0}^{k-1} v^{(l)}(\tau)\,\varepsilon^l, \tau, \varepsilon\right)\right]^{(k)}, \quad d = \overline{1,N}. \tag{59.29}$$

Здесь $v^{(k)}(\tau)$ — положительные, монотонно возрастающие функции τ на полуоси $\tau \geqslant 0$.

59.7. Сходимость ряда (59.7)

Предположим, что при $\tau \geqslant 0$, $l = \overline{0, k-1}$, $d = \overline{1,N}$ функции $u^{(l)}(\tau)$ существуют, единственны, непрерывны и удовлетворяют неравенству

$$|u_d^{(l)}(\tau)| \leqslant v_d^{(l)}(\tau). \tag{59.30}$$

Тогда из (59.4), (59.8), (59.11), (59.19)–(59.22), (59.29), (59.30) следует, что $u^{(k)}(\tau)$ существует, единственна, непрерывна при $\tau \geqslant 0$ и удовлетворяет соотношениям

$$\|u_1^{(k)}(\tau)\| = \left\| \left[H_1\Big(\sum_{l=0}^{k-1} u^{(l)}(\tau)\,\varepsilon^l, \tau, \varepsilon\Big)\right]^{(k)} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \Bigg\{\varepsilon^{K_1}C_4\left[v_1(\tau,\varepsilon)+\ldots+v_N(\tau,\varepsilon)\right]+$$

$$+\varepsilon^{K_2}\int_0^{\tau} \exp\left\{C_1\varepsilon^{K_2}(\tau-\sigma)\right\}\left\{\left(C_5\varepsilon^{K_2}+C_6e^{-\kappa\sigma}\right)\left[v_1(\sigma,\varepsilon)+\ldots+v_N(\sigma,\varepsilon)\right]+\right.$$

$$+(1+C_{10})\,C_2\,\widetilde{G}\Big(\sum_{l=0}^{k-1} v^{(l)}(\sigma)\varepsilon^l,\varepsilon\Big)+C_3\,e^{-\kappa\sigma}\Big\}\,d\sigma\Big\}^{(k)} \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\widetilde{H}_1\Big(\sum_{l=0}^{k-1} v^{(l)}(\tau)\,\varepsilon^l,\varepsilon\Big)\Big]^{(k)},$$

$$\|u_2^{(k)}(\tau)\| = \Big\|\Big[H_2\Big(\sum_{l=0}^{k-1} u^{(l)}(\tau)\,\varepsilon^l,\tau,\varepsilon\Big)\Big]^{(k)}\Big\| \leqslant \Big\{\int_0^\tau \Big\{\Big[C_7\exp\{-\kappa_2(\tau-\sigma)\}+$$

$$+\exp\Big\{C_1\varepsilon^{K_2}(\tau-\sigma)\Big\}\,\Big(C_8\varepsilon^{K_2}+C_9\,e^{-\kappa\sigma}\Big)\Big]\,\varepsilon^{K_2}\,\Big[v_1(\sigma,\varepsilon)+\ldots+v_N(\sigma,\varepsilon)\Big]+$$

$$+\Big[(C_{11}+C_{13})\,\varepsilon^{K_2}\,\exp\Big\{C_1\varepsilon^{K_2}(\tau-\sigma)\Big\}+C_{12}\exp\{-\kappa_2(\tau-\sigma)\}\Big]\times$$

$$\times C_2\,\widetilde{G}\Big(\sum_{l=0}^{k-1} v^{(l)}(\sigma)\,\varepsilon^l,\varepsilon\Big)+C_3C_{11}\varepsilon^{K_2}\,\exp\Big\{C_1\varepsilon^{K_2}(\tau-\sigma)-\kappa\sigma\Big\}\Big\}\,d\sigma\Big\}^{(k)} \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\widetilde{H}_2\Big(\sum_{l=0}^{k-1} v^{(l)}(\tau)\,\varepsilon^l,\tau,\varepsilon\Big)\Big]^{(k)},$$

$$|u_d^{(k)}(\tau)| \leqslant \|u^{(k)}(\tau)\| \leqslant \Big[h\Big(\sum_{l=0}^{k-1} v^{(l)}(\tau)\varepsilon^l,\tau,\varepsilon\Big)\Big]^{(k)} = v_d^{(k)}(\tau), \quad d=\overline{1,N}.$$

Таким образом, неравенство (59.30) справедливо при $l = k$. Так как $u_d^{(0)}(\tau) = v_d^{(0)}(\tau) = 0$, то по индукции отсюда получаем: на полуоси $\tau \geqslant 0$ ряд (59.26) мажорирует (59.7), поэтому ряд (59.7) сходится равномерно на множествах (59.27), (59.28). Коэффициенты ряда (59.7) существуют, единственны и непрерывны при $\tau \geqslant 0$.

59.8. Окончание доказательства теорем 58.1, 58.2

Из равномерной сходимости ряда (59.7) и из соотношений (59.11), (59.20) следует, что подынтегральные выражения в (59.4) разлагаются в степенные ряды по ε, равномерно сходящиеся на множестве, задаваемом неравенствами $0 \leqslant \sigma \leqslant \tau$ и (59.27) при фиксированном τ. Коэффициенты ряда непрерывны по σ. Поэтому ряды можно почленно интегрировать (интеграл от суммы ряда равен сумме интегралов от его членов). Отсюда следует, что $H\Big(u(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\Big)$ разлагается в степенной ряд по ε, который сходится на множестве (59.28) и совпадает с рядом (59.7) $\Big($по построению (59.7), смотрите формулы (59.8)$\Big)$. Это означает, что

сумма ряда (59.7) является решением уравнений (59.4) и, соответственно, уравнений (59.3) на множестве (59.28). Отсюда, из (59.2) и условия 58.3 следует: а) на множестве (59.28) ряд (58.3) сходится равномерно к решению задачи (58.2); б) на множестве $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$ ряд (58.4) сходится равномерно к решению задачи (58.1). Теоремы 58.1, 58.2 доказаны. При этом $\varepsilon_* = \mu_*$.□

§ 60. Оценка нормы матрицы Коши, II

Обозначим $V(t, s, \mu)$ матрицу Коши системы

$$\mu \frac{dr}{dt} = A(t)\, r.$$

Теорема 60.1. [12]. *Пусть при* $0 \leqslant t \leqslant T$ $A(t)$ *непрерывна и* $\operatorname{Re} \lambda_j(t) < -2\kappa < 0$, $j = \overline{1, N}$. *Тогда найдутся такие постоянные* C, $\mu_* > 0$, *что при* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$ *выполняется неравенство*

$$\|V(t, s, \mu)\| \leqslant C \, \exp\left\{-\kappa(t - s)\mu^{-1}\right\}.$$

Теорема 60.2. [42]. *Пусть при* $t \geqslant 0$: *а)* $A(t)$ *непрерывна, ограничена по норме и удовлетворяет условию Липшица; б)* $\operatorname{Re} \lambda_j(t) \leqslant -2\kappa < 0$, $j = \overline{1, N}$. *Тогда найдутся такие постоянные* C, $\mu_* > 0$, *что при* $0 \leqslant s \leqslant t$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$ *выполняется неравенство*

$$\|V(t, s, \mu)\| \leqslant C \, \exp\left\{-\kappa(t - s)\mu^{-1}\right\}.$$

Замечание 60.1. Настоящий параграф дополняет оценки, данные в § 13.

§ 61. Выводы главы 7

В главе 7 рассмотрены некоторые задачи, относящиеся к задаче Тихонова.

В § 58 сделан переход от автономной задачи Тихонова с $m = 2$ к регулярно возмущенной задаче Коши заменой независимой переменной t на быстрое время τ. Решение построено в виде ряда Пуанкаре. Сформулированы теоремы о том, что при определенных условиях ряд Пуанкаре сходится к решению задачи Тихонова на конечном отрезке переменной t (теорема 58.1) и к решению регулярно возмущенной задачи на интервале τ порядка отрицательной степени малого параметра (теорема 58.2). Отметим, что теорема Пуанкаре 9.1 гарантирует сходимость ряда только на конечном отрезке переменной τ, что означает сходимость на интервале t порядка положительной степени малого параметра.

Примеры 58.1, 58.2 показывают, что ряд Пуанкаре может быть как асимптотическим, так и не асимптотическим.

Доказательство теорем 58.1, 58.2 дано в § 59. Пример 58.3 показывает, что использованный метод доказательства не позволяет распространить теоремы 58.1, 58.2 на случай $m > 2$.

В § 59 даны оценки нормы матрицы Коши для сингулярных уравнений, дополняющие оценки из § 13.

§ 62. Выводы части 2

В части 2 рассмотрена *задача Тихонова* — задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных. Исследованием такой задачи занимались многие математики: А. Н. Тихонов, И. С. Градштейн, А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, С. А. Ломов, В. В. Стрыгин, В. А. Соболев, А. И. Климушев, Н. Н. Красовский, Б. С. Разумихин и другие. Среди опубликованных работ отметим монографии [10, 11, 32, 42], в которых предложены разные подходы к исследованию задачи Тихонова.

В работах [13, 14, 16, 22, 34, 40, 43, 44] исследуется существование решения задачи Тихонова и его свойства, в [9, 11, 32, 42, 46, 47], кроме того, строится асимптотическое решение.

В работах [11, 22, 32, 34, 40, 42, 44, 47] при производных стоит первая степень малого параметра. В [9, 13, 14, 16, 43, 46] при производных стоят разные степени малого параметра или разные малые параметры. В этой книге при производных стоят целые степени одного малого параметра.

При исследовании задачи Тихонова рассматривались разные интервалы независимой переменной: отрезок [9, 11, 14, 32, 42, 43, 44, 47], полуось [13, 16, 22, 34, 40, 42], интервал порядка обратной степени малого параметра [42, 46]. В этой книге рассматриваются отрезок, полуось и асимптотически большие интервалы независимой переменной (порядка $\mu^{-\chi}$ и $-\chi \ln \mu$).

Отметим работы [11, 32, 38], в которых рассматривались критические случаи для сингулярно возмущенных уравнений (когда некоторые условия, сформулированные А. Н. Тихоновым, нарушаются). В этой книге такие задачи не рассматриваются.

Часть 2 содержит результаты из [28]. Решение задачи Тихонова строится двумя методами: *методом пограничных функций* в главе 3 и *методом двух параметров* в главе 5. Метод пограничных функций совпадает с методом Васильевой — Иманалиева в случае двух (векторных) дифференциальных уравнений с первой степенью малого параметра при производной. Метод двух параметров имеет меньшую область применимости, чем метод пограничных функций. Например, к примерам 31.1–31.5, 31.10 метод двух параметров не применим, так как правые части дифференциальных уравнений и начальные значения переменных не содержат малого параметра. В тех случаях, когда метод двух параметров применим, он предпочтительнее, чем метод пограничных функций, так как проще: решение строится в виде суммы одного ряда, а в методе пограничных функций решение

строится в виде суммы m рядов. Асимптотические решения, построенные двумя методами, могут совпадать (примеры 31.7–31.9) и могут быть различными (пример 47.1).

При выполнении условий 26.1–26.8 ряды, построенные двумя методами, являются асимптотическими для решения задачи Тихонова на отрезке (теоремы 28.1, 43.5), на полуоси (теоремы 28.2, 43.6) и на асимптотически больших интервалах времени (теоремы 28.3, 28.4, 43.7, 43.8). Асимптотические оценки остаточного члена, полученные двумя методами, совпадают. При выполнении дополнительных условий 43.1, 43.2 ряды, построенные методом двух параметров, сходятся к точному решению на отрезке (теорема 43.1), на полуоси (теорема 43.2), на асимптотически больших интервалах времени (теоремы 43.3, 43.4). Теорема 43.9 гарантирует сходимость ряда, построенного методом двух параметров, к решению задачи Тихонова при фиксированном значении малого параметра на ненулевом интервале времени. Теорема 28.1 является теоремой Васильевой, теорема 28.2 является теоремой Бутузова.

Теоремы 28.5, 28.6 позволяют получать численные оценки: остаточного члена асимптотического разложения решения, интервала времени существования решения, области значений малого параметра. Теорема 28.6 аналогична теоремам Ляпунова, Румянцева.

В § 30 даны теоремы о предельном переходе: при стремлении малого параметра к нулю решение исходной задачи стремится к решению вырожденной задачи на интервале $0 < t \leqslant T$ (теорема Тихонова 30.1) и на полуоси $t > 0$ (теорема 30.2).

В главе 4 дано доказательство теорем 28.1–28.4 о методе пограничных функций.

В главе 6 методы, предложенные для решения задачи Тихонова, применены к решению уравнений, описывающих *движение гироскопа в кардановом подвесе.*

Простые примеры задачи Тихонова рассмотрены в § 31, § 47, § 58.

В главе 7 рассмотрена автономная задача Тихонова с $m = 2$. Заменой независимой переменной сделан переход к регулярно возмущенной задаче Коши. Решение построено в виде ряда Пуанкаре. Кроме того, в главе 7 даны оценки нормы матрицы Коши, дополняющие оценки из § 13.

Часть 3

Задача Коши с двойной сингулярностью

Глава 8

Метод пограничных функций

§ 63. Определение задачи Коши с двойной сингулярностью

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1\Big(x, t, \mu, f(t, \mu)\Big), \quad x_1|_{t=0} = x_1^\circ(\mu), \tag{63.1}$$

$$\mu^{K_2}\frac{dx_2}{dt} = F_2\Big(x, t, \mu, f(t, \mu)\Big), \quad x_2|_{t=0} = x_2^\circ(\mu),$$

где x_i, F_i, x_i° — N_i-мерные векторы; $x \equiv (x_1, x_2)$; $N = N_1 + N_2$; t — независимая переменная (время); $\mu > 0$ — малый параметр; $f \in \mathbf{R}^M$ — M-мерный вектор; K_2 — целое число; $0 = K_1 < K_2$.

Введем обозначения. $D_x \equiv D_1 \times D_2$. $D_i \subset \mathbf{R}^{N_i}$ — окрестность точки $x_i = 0$. D_t — множество в пространстве $\mathbf{R} \ni t$. $D_f \subset \mathbf{R}^M$ — ограниченная и замкнутая область. T, $\overline{\mu}$ — положительные числа.

Определение 63.1. Задача (63.1) называется *задачей Коши с двойной сингулярностью*, если: 1) функции $F_i(x, t, \mu, f)$, $i = 1, 2$, определены на прямом произведении области D_x, отрезков $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant \mu \leqslant \overline{\mu}$ и области D_f; 2) функции $x_i^\circ(\mu)$, $i = 1, 2$, определены на отрезке $0 \leqslant \mu \leqslant \overline{\mu}$ и имеют значения в области D_{x_i}; 3) функция $F_2(x, t, 0, f)$ не равна тождественно нулю; 2) функция f определена на прямом произведении интервалов $0 \leqslant t \leqslant T$ и $0 < \mu \leqslant \overline{\mu}$ и имеет значения в области D_f.

Определение 63.2. Задача

$$\begin{aligned} &\frac{d\overline{x}_1}{dt} = F_1\Big(\overline{x}, t, 0, f(t, \mu)\Big), \quad \overline{x}_1|_{t=0} = x_1^\circ(0), \\ &F_2\Big(\overline{x}, t, 0, f(t, \mu)\Big) = 0, \quad \overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2) \end{aligned} \tag{63.2}$$

называется *вырожденной задачей.*

В § 69 сформулированы теоремы о близости решений задач (63.1), (63.2) при выполнении соответствующих условий, так что $\|x(t, \mu) - \overline{x}(t, \mu)\| \to 0$ при $\mu \to 0$, $0 < t \leqslant T$ (или $t > 0$).

Замечание 63.1. Если правые части дифференциальных уравнений (63.1) не зависят явно от f, то при выполнении соответствующих условий (63.1) — задача Тихонова, рассмотренная в части 2. Если F_1 не зависит от x_2, то первые два равенства в (63.1) представляют собой (при выполнении соответствующих условий) почти регулярную задачу Коши, рассмотренную в части 1. Функция f может быть не определена при $\mu = 0$, например, когда

$$f = \left(\exp\left\{-\frac{t}{\mu}\right\}, \cos\left(\frac{t}{\mu}\right)\right).$$

Таким образом, задача (63.1) содержит сингулярности двух видов: малый параметр при производной и сингулярность в функции f.

Замечание 63.2. Задачу Коши с двойной сингулярностью можно определить для случая m дифференциальных уравнений типа (22.1), $m \geqslant 2$. Для этого нужно рассмотреть правые части дифференциальных уравнений вида $F_i\big(x, t, \mu, f(t, \mu)\big)$, $i = \overline{1, m}$. В этой книге рассмотрен случай $m = 2$ из-за громоздкости вычислений при $m > 2$.

§ 64. Построение асимптотического решения методом пограничных функций

Чтобы построить асимптотическое решение задачи (63.1), рассмотрим вспомогательные уравнения с двумя малыми параметрами μ, ν:

$$\mu^{K_i} \frac{dy_{1i}}{d\tau_1} = F_i\Big(y_1, \tau_1, \mu, f(\tau_1, \nu)\Big), \tag{64.1}$$

$$\mu^{K_i} \frac{dy_{2i}}{d\tau_2} = \mu^{K_2}\bigg[F_i\Big(\sum_{l=1}^{2} y_l, \tau_2\mu^{K_2}, \mu, f(\tau_2\nu^{K_2}, \nu)\Big) -$$

$$- F_i\Big(y_1, \tau_2\mu^{K_2}, \mu, f(\tau_2\nu^{K_2}, \nu)\Big)\bigg],$$

$$\lim_{\tau_2\to\infty} y_{21}(\tau_2, \mu, \nu) = 0, \quad \sum_{j=1}^{2} y_j(0, \mu, \nu) = x^\circ(\mu), \quad i = 1, 2.$$

Здесь $y_j = (y_{j1}, y_{j2})$; $y_{ji} = y_{ji}(\tau_j, \mu, \nu)$; $i = 1, 2$; $j = 1, 2$.

Асимптотическое решение задачи (63.1) будем строить в виде суммы

$$x(t, \mu) = \sum_{j=1}^{2} y_j(\tau_j, \mu, \mu), \quad \tau_j = t\mu^{-K_j}, \quad j = 1, 2 \quad (\tau_1 = t, \quad K_1 = 0), \tag{64.2}$$

где функции y_j представим в виде рядов

$$y_j(\tau_j, \mu, \nu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} y_j^{(k)}(\tau_j, \nu)\, \mu^k. \tag{64.3}$$

Тогда асимптотическое решение задачи (63.1) примет вид

$$\boxed{x(t,\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} y_j^{(k)}(\tau_j,\mu)\ \mu^k.} \tag{64.4}$$

Опишем построение уравнений для коэффициентов ряда (64.4), предполагая, что все операции имеют смысл.

- В уравнения (64.1) подставляем ряды (64.3).
- Разлагаем левые и правые части уравнений (64.1) в ряды по степеням μ так, чтобы в уравнениях, содержащих производную $dy_{ji}/d\tau_j$, коэффициенты разложения зависели только от переменных τ_j, ν $(j = 1, 2)$. Для этого при разложении функций воспользуемся равенством $\tau_1 = t = \tau_2\mu^{K_2}$.
- Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях μ. Получаем уравнения для $y_j^{(k)}(\tau_j, \nu)$.

Описанный метод построения асимптотики называется *методом пограничных функций*. Переменная τ_2 называется *быстрым временем*; y_2 называется *пограничной функцией*. При выполнении условий, сформулированных в § 66, пограничная функция удовлетворяет неравенствам

$$\|y_2(\tau_2, 0, \mu)\| \leqslant C \exp\{-\kappa_{02}\tau_2\} \tag{64.5}$$

(смотрите леммы 68.1, 68.3). Из (64.5) следует, что функция y_2 при $\mu \to 0$ вносит существенный вклад в асимптотику решения задачи (63.1) на интервале времени t порядка μ^{K_2}. Функция $y_1(t, \mu, \mu)$ является основным членом асимптотики на всем интервале времени за исключением *пограничного слоя*, примыкающего к точке $t = 0$ и стремящегося к нулю при $\mu \to 0$.

После подстановки рядов (64.3) в уравнения (64.1) получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial y_{1i}^{(k)}(\tau_1,\nu)}{\partial\tau_1}\ \mu^{K_i+k} = F_i\left(\sum_{q=0}^{\infty} y_1^{(q)}(\tau_1,\nu)\ \mu^q, \tau_1, \mu, f(\tau_1,\nu)\right), \tag{64.6}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial y_{2i}^{(k)}(\tau_2,\nu)}{\partial\tau_2}\ \mu^{K_i+k} =$$

$$= \mu^{K_2}\Bigg[F_i\left(\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{2} y_l^{(q)}(\tau_2\mu^{K_2-K_1},\nu)\ \mu^q, \tau_2\mu^{K_2}, \mu, f(\tau_2\nu^{K_2},\nu)\right) -$$

$$- F_i\left(\sum_{q=0}^{\infty} y_1^{(q)}(\tau_2\mu^{K_2},\nu)\ \mu^q, \tau_2\mu^{K_2}, \mu, f(\tau_2\nu^{K_2},\nu)\right)\Bigg],$$

$$\lim_{\tau_2\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} y_{21}^{(k)}(\tau_2,\nu)\,\mu^k=0,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} y_j^{(k)}(0,\nu)\,\mu^k=x^\circ(\mu),\quad i=1,2.$$

Здесь $y_j^{(k)}=\left(y_{j1}^{(k)},\ y_{j2}^{(k)}\right)$. Разложив левые и правые части уравнений (64.6) в ряды по степеням μ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, для $k=0$, 1 получим:

$\boxed{k=0}$

$$\frac{dy_{11}^{(0)}}{d\tau_1}=F_1\Big(y_1^{(0)},\tau_1,0,f(\tau_1,\nu)\Big),\quad 0=F_2\Big(y_1^{(0)},\tau_1,0,f(\tau_1,\nu)\Big),\qquad(64.7)$$

$$\frac{dy_{21}^{(0)}}{d\tau_2}=0,$$

$$\frac{dy_{22}^{(0)}}{d\tau_2}=F_2\Big(Y_2,0,0,f(\tau_2\nu^{K_2},\nu)\Big)-F_2\Big(Y_1(0,\nu),0,0,f(\tau_2\nu^{K_2},\nu)\Big),$$

$$\lim_{\tau_2\to\infty} y_{21}^{(0)}(\tau_2,\nu)=0,\quad \sum_{j=1}^{2} y_j^{(0)}(0,\nu)=x^\circ(0),$$

$$Y_2\equiv y_1^{(0)}(0,\nu)+y_2^{(0)},\quad Y_1(0,\nu)=y_1^{(0)}(0,\nu);$$

$\boxed{k=1}$

$$\frac{dy_{11}^{(1)}}{d\tau_1}=\left[\frac{\partial F_1}{\partial x}\Big(y_1^{(0)}(\tau_1,\nu),\tau_1,0,f\Big)y_1^{(1)}+\frac{\partial F_1}{\partial \mu}\Big(y_1^{(0)}(\tau_1,\nu),\tau_1,0,f\Big)\right]_{f=f(\tau_1,\nu)},$$

$$\frac{dy_{12}^{(0)}}{d\tau_1}\langle K_2=1\rangle=\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}\Big(y_1^{(0)}(\tau_1,\nu),\tau_1,0,f\Big)\,y_1^{(1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial F_2}{\partial \mu}\Big(y_1^{(0)}(\tau_1,\nu),\tau_1,0,f\Big)\right]_{f=f(\tau_1,\nu)},$$

$$\frac{dy_{21}^{(1)}}{d\tau_2}=\Big[F_1\Big(Y_2(\tau_2,\nu),0,0,f\Big)-F_1\Big(Y_1(0,\nu),0,0,f\Big)\Big]_{f=f(\tau_2\nu^{K_2},\nu)}\ \langle K_2=1\rangle,$$

$$\frac{dy_{22}^{(1)}}{d\tau_2}=F_{2*}(y_2^{(1)},\tau_2,\nu),\quad \lim_{\tau_2\to\infty} y_{21}^{(1)}(\tau_2,\nu)=0,\quad \sum_{j=1}^{2} y_j^{(1)}(0,\nu)=\frac{dx^\circ}{d\mu}(0),$$

$$F_{2*}(y_2^{(1)},\tau_2,\nu)\equiv\left\{\frac{\partial F_2}{\partial x}\Big(Y_2(\tau_2),0,0,f\Big)\ y_2^{(1)}+\right.$$

$$+ \left[\frac{\partial F_2}{\partial x}\Big(Y_2(\tau_2,\nu),0,0,f\Big) - \frac{\partial F_2}{\partial x}\Big(Y_1(0,\nu),0,0,f\Big)\right] \times$$

$$\times \left[y_1^{(1)}(0,\nu) + \frac{\partial y_1^{(0)}(t,\nu)}{\partial t}\Big|_{t=0}\ \tau_2\ (K_2=1)\right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial F_2}{\partial t}\Big(Y_2(\tau_2,\nu),t,0,f\Big) - \frac{\partial F_2}{\partial t}\Big(Y_1(0,\nu),t,0,f\Big)\right]_{t=0}\ \tau_2\ (K_2=1)+$$

$$+ \left[\frac{\partial F_2}{\partial \mu}\Big(Y_2(\tau_2,\nu),0,\mu,f\Big) - \frac{\partial F_2}{\partial \mu}\Big(Y_1(0,\nu),0,\mu,f\Big)\right]_{\mu=0}\Bigg\}_{f=f(\tau_2\nu^{K_2},\nu)},$$

$$Y_2(\tau_2,\nu) = y_1^{(0)}(0,\nu) + y_2^{(0)}(\tau_2,\nu).$$

Из уравнений (63.2), (64.7) следует, что

$$y_{21}^{(0)} = 0, \quad y_1^{(0)}(\tau_1,\mu) = \bar{x}(\tau_1,\mu), \tag{64.8}$$

где $\bar{x}(t,\mu)$ — решение вырожденной задачи (63.2). При $k \geqslant 1$ коэффициенты ряда (64.4) находятся из линейных уравнений (алгебраических или дифференциальных, смотрите § 65).

§ 65. Порядок вычисления коэффициентов асимптотики

Коэффициенты ряда (64.4) определяются последовательно для $k = 0, 1, \ldots$. Опишем порядок их вычисления при фиксированном значении k.

65.1.

Из второго уравнения (64.6) при $i = 1$ и из третьего уравнения (64.6) находится функция $y_{21}^{(k)}$:

$$y_{21}^{(0)} = 0; \quad y_{21}^{(k)}(\tau_2,\nu) = -\int\limits_{\tau_2}^{\infty} f_{k21}(\sigma,\nu)\,d\sigma, \quad k \geqslant 1, \tag{65.1}$$

$$f_{k21}(\tau_2,\nu) \equiv \Bigg[\mu^{K_2} F_1\Bigg(\sum_{q=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{2} y_l^{(q)}(\tau_2\mu^{K_2-K_1},\nu)\mu^q, \tau_2\mu^{K_2}, \mu, f(\tau_2\nu^{K_2},\nu)\Bigg) -$$

$$- \mu^{K_2} F_1\Bigg(\sum_{q=0}^{k-1} y_1^{(q)}(\tau_2\mu^{K_2},\nu)\,\mu^q, \tau_2\mu^{K_2}, \mu,\ f(\tau_2\nu^{K_2},\nu)\Bigg)\Bigg]^{(k)}.$$

Здесь $[\ ]^{(k)}$ обозначает коэффициент при μ^k в разложении функции, стоящей в квадратных скобках, в ряд по степеням μ.

65.2.

Если $k = 0$, то находится $y_{12}^{(0)}$ как функция

$$y_{12}^{(0)} = \widetilde{\varphi}_{012}(y_{11}^{(0)}, t, \nu) \tag{65.2}$$

из уравнения (64.7):

$$F_2\left(y_1^{(0)}, t, 0, f(t,\nu)\right) = 0, \quad y_1^{(0)} = (y_{11}^{(0)}, y_{12}^{(0)}).$$

65.3.

Находится функция $y_{11}^{(k)}(t,\nu)$. Если $k = 0$, то из (64.7) следует, что $y_{11}^{(0)}(t,\nu)$ — решение задачи Коши

$$\frac{dy_{11}^{(0)}}{dt} = F_1\left(\widetilde{y}_1^{(0)}, t, 0, f(t,\nu)\right),$$

$$y_{11}^{(0)}(0,\nu) = x_1^\circ(0), \quad \widetilde{y}_1^{(0)} \equiv \left(y_{11}^{(0)},\ \widetilde{\varphi}_{012}(y_{11}^{(0)}, t, \nu)\right),$$

где $\widetilde{\varphi}_{012}$ — функция (65.2). Если $k \geqslant 1$, то первое уравнение (64.6) при $i = 2$ является линейным алгебраическим уравнением относительно $y_{11}^{(k)}$, $y_{12}^{(k)}$. Из него выражаем $y_{12}^{(k)}$ и подставляем в первое уравнение (64.6) при $i = 1$. Получаем линейную задачу Коши для $y_{11}^{(k)}$. Начальное значение $y_{11}^{(k)}$ находится из последнего уравнения (64.6). Решение полученной линейной задачи имеет вид

$$y_{11}^{(k)}(t,\nu) = U_1(t,0,\nu)\cdot\left\{[x_1^\circ(\mu)]^{(k)} - y_{21}^{(k)}(0,\nu)\right\} + \int_0^t U_1(t,s,\nu)\cdot f_{k11}(s,\nu)\,ds, \tag{65.3}$$

где $U_1(t,s,\nu)$ — матрица Коши уравнения

$$\frac{dr_1}{dt} = \widetilde{A}_1(t,\nu)\, r_1, \tag{65.4}$$

$$\widetilde{A}_1(t,\nu) \equiv \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1}\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right]\left(y_1^{(0)}(t,\nu), t, 0, f(t,\nu)\right),$$

$$f_{k11}(t,\nu) \equiv \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1}\right]\left(y_1^{(0)}(t,\nu), t, 0, f(t,\nu)\right)\cdot f_{k12}(t,\nu) +$$

$$+\left[F_1\left(\sum_{q=0}^{k-1} y_1^{(q)}(t,\nu)\,\mu^q, t, \mu, f(t,\nu)\right)\right]^{(k)},$$

$$f_{k12}(t,\nu) \equiv \left[\sum_{q=0}^{k-1}\frac{\partial y_{12}^{(q)}(t,\nu)}{\partial t}\,\mu^{K_2+q} - F_2\left(\sum_{q=0}^{k-1} y_1^{(q)}(t,\nu)\mu^q, t, \mu, f(t,\nu)\right)\right]^{(k)}.$$

65.4.

Находится функция $y_{12}^{(k)}(t,\nu)$. Если $k=0$, то из (65.2) получаем

$$y_{12}^{(0)}(t,\nu)=\widetilde{\varphi}_{012}\Big(y_{11}^{(0)}(t,\nu),t,\nu\Big). \tag{65.5}$$

Если $k\geqslant 1$, то $y_{12}^{(k)}$ находится из первого уравнения (64.6) при $i=2$:

$$y_{12}^{(k)}(t,\nu)=\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1}\Big(y_1^{(0)}(t,\nu),t,0,f(t,\nu)\Big)\times \tag{65.6}$$

$$\times\left[-\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\Big(y_1^{(0)}(t,\nu),t,0,f(t,\nu)\Big)\cdot y_{11}^{(k)}(t,\nu)+f_{k12}(t,\nu)\right],$$

$f_{k12}(t,\nu)$ — функция (65.4).

65.5.

Находится функция $y_{22}^{(k)}(\tau_2,\nu)$. Если $k=0$, то $y_{22}^{(0)}$ — решение задачи Коши (64.7):

$$\frac{dy_{22}^{(0)}}{d\tau_2}=\left[F_2\Big(y_1^{(0)}(0,\nu)+\widetilde{y}_2^{(0)},0,0,f\Big)-F_2\Big(y_1^{(0)}(0,\nu),0,0,f\Big)\right]_{f=f(\tau_2\nu^{K_2},\nu)},$$

$$y_{22}^{(0)}(0,\nu)=x_2^\circ(0)-y_{12}^{(0)}(0,\nu),\quad \widetilde{y}_2^{(0)}\equiv(0,\ y_{22}^{(0)}). \tag{65.7}$$

Если $k\geqslant 1$, то $y_{22}^{(k)}$ — решение линейной задачи Коши, которая описывается вторым (с $i=2$) и последним уравнениями (64.6). Это решение имеет вид

$$y_{22}^{(k)}=\widetilde{U}_2(\tau_2,0,\nu)\cdot\left\{[x_2^\circ(\mu)]^{(k)}-y_{12}^{(k)}(0,\nu)\right\}+\int\limits_0^{\tau_2}\widetilde{U}_2(\tau_2,\sigma_2,\nu)\cdot f_{k22}(\sigma_2,\nu)\,d\sigma_2, \tag{65.8}$$

где $\widetilde{U}_2(\tau_2,\sigma_2,\nu)$ — матрица Коши уравнения

$$\frac{dr_2}{d\tau_2}=\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\Big(Y_2(\tau_2,\nu),0,0,f(\tau_2\nu^{K_2},\nu)\Big)\ r_2,$$

$$Y_2(\tau_2,\nu)=y_1^{(0)}(0,\nu)+y_2^{(0)}(\tau_2,\nu), \tag{65.9}$$

$$f_{k22}(\tau_2,\nu)\equiv\left\{\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\Big(Y_2(\tau_2,\nu),0,0,f\Big)\cdot y_{21}^{(k)}(\tau_2,\nu)+\right.$$

$$+\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}\Big(Y_2(\tau_2,\nu),0,0,f\Big)-\frac{\partial F_2}{\partial x}\Big(y_1^{(0)}(0,\nu),0,0,f\Big)\right]\ y_1^{(k)}(0,\nu)+$$

$$+\left[F_2\left(\sum_{q=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{2} y_l^{(q)}(\tau_2\mu^{K_2-K_l},\nu)\,\mu^q,\ \tau_2\mu^{K_2},\ \mu,\ f\right)-\right.$$

$$\left.-F_2\left(\sum_{q=0}^{k-1} y_1^{(q)}(\tau_2\mu^{K_2},\nu)\,\mu^q,\ \tau_2\mu^{K_2},\ \mu,\ f\right)\right]^{(k)}\Bigg\}_{f=f(\tau_2\nu^{K_2},\nu)}.$$

§ 66. Условия, налагаемые на задачу Коши с двойной сингулярностью

Перечислим условия, при выполнении которых ряд (64.4) является асимптотическим решением задачи (63.1). Для этого предварительно приведем задачу к виду, удобному для формулировки и доказательства теорем. Введем переменную

$$\Delta x = x - \bar{x}(t,\mu),$$

где $\bar{x}(t,\mu)$ — решение вырожденной задачи (63.2). Из (63.1), (63.2) следует, что переменная Δx является решением следующей задачи:

$$\mu^{K_i}\,\frac{d\Delta x_i}{dt} = \Delta F_i\Big(\Delta x, t, \mu, f(t,\mu)\Big),\quad \Delta x_i|_{t=0} = \Delta x_i^\circ(\mu),\quad i=1,2.$$

Здесь

$$\Delta x = (\Delta x_1,\ \Delta x_2),$$

$$\Delta F_1\Big(\Delta x, t, \mu, f\Big) = F_1\Big(\bar{x}(t,\mu)+\Delta x, t, \mu, f\Big) - F_1\Big(\bar{x}(t,\mu), t, 0, f\Big),$$

$$\Delta F_2\Big(\Delta x, t, \mu, f\Big) = F_2\Big(\bar{x}(t,\mu)+\Delta x, t, \mu, f\Big) - \mu^{K_2}\,\frac{\partial \bar{x}_2(t,\mu)}{\partial t},$$

$$\Delta x_1^\circ(\mu) = x_1^\circ(\mu) - x_1^\circ(0),\quad \Delta x_2^\circ(\mu) = x_2^\circ(\mu) - \bar{x}_2(0,\mu).$$

Из написанных формул и из (63.2) следует, что

$$\Delta F_i\Big(0, t, 0, f(t,\mu)\Big) = 0,\quad i=1,2,\quad \Delta x_1^\circ(0)=0.$$

Исходя из проделанных вычислений, будем предполагать, что в системе (63.1) уже сделана соответствующая замена, и значит выполняется следующее условие 66.1.

Условие 66.1. $F_i(0,t,0,f) = 0$, $x_1^\circ(0) = 0$, $i = 1,2$, $t \in D_t$, $f \in D_f$.

Условие 66.2. *Функции $F_i(x,t,\mu,f)$ имеют непрерывные, ограниченные по норме частные производные до $(n+2)$-го порядка включительно по всем переменным при $x \in D_x$, $t \in D_t$, $0 \leqslant \mu \leqslant \bar{\mu}$, $f \in D_f$, $i = 1,2$.*

Условие 66.3. *Функция $x^\circ(\mu)$ имеет непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно при $0 \leqslant \mu \leqslant \bar{\mu}$.*

Условие 66.4. *Матрица $H_1(x, t, 0, f)$ ограничена по норме при $x \in D_x$, $t \in D_t$, $f \in D_f$,*

$$H_1(x, t, \mu, f) \equiv \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)^{-1} (x, t, \mu, f). \tag{66.1}$$

При выполнении условия 66.1 вырожденная задача (63.2) имеет нулевое решение $\bar{x}(t, \mu) = 0$. Будем рассматривать именно это решение, хотя в общем случае оно не единственно (смотрите пример 31.4).

Условие 66.5. $y_1^{(0)}(t, \mu) = 0$.

Определение 66.1. Дифференциальное уравнение

$$\frac{dr_2}{d\tau_2} = F_2\Big(\tilde{r}, 0, 0, f(\tau_2\mu^{K_2}, \mu)\Big), \quad \tilde{r} \equiv (0,\ r_2) \tag{66.2}$$

называется *присоединенным уравнением.*

Из условия 66.1 следует, что если значения f принадлежат области D_f, то дифференциальное уравнение (66.2) имеет нулевое решение $r_2 = 0$. Уравнение в вариациях для (66.2) имеет вид

$$\frac{dq_2}{d\tau_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\ \Big(0, 0, 0, f(\tau_2\mu^{K_2}, \mu)\Big)\ q_2. \tag{66.3}$$

Условие 66.6. *а) Матрица Коши $\overline{U}_2(\tau_2, \sigma_2, \mu)$ уравнения (66.3) удовлетворяет неравенству*

$$\|\overline{U}_2(\tau_2, \sigma_2, \mu)\| \leqslant \overline{C}_2 \exp\{-\kappa_{02}(\tau_2 - \sigma_2)\}$$

при $0 \leqslant \sigma_2 \leqslant \tau_2$, $0 < \mu \leqslant \bar{\mu}$; б) точка $x_2^\circ(0)$ принадлежит области влияния D_{2*} нулевого решения уравнения (66.2) при $0 < \mu \leqslant \bar{\mu}$.

Условие 66.7. *Множество $D_x^{(0)} = \Big\{x:\ x = \theta y_2^{(0)}(\tau_2, \mu), \quad \tau_2 \geqslant 0, \ 0 < \mu \leqslant \bar{\mu}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1\Big\}$ принадлежит окрестности D_x.*

Коэффициент $y_2^{(0)}(\tau_2, \mu)$ ряда (64.4) определяется из (65.1), (65.7).

Условие 66.8. *Матрица Коши $U_2(t, s, \mu)$ уравнения*

$$\mu^{K_2}\ \frac{dr_2}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\ \Big(0, t, 0, f(t, \mu)\Big)\ r_2 \tag{66.4}$$

удовлетворяет неравенствам

$$\|U_2(t, s, \mu)\| \leqslant C_2 \exp\big\{ -\kappa_2(t-s)\mu^{-K_2}\big\} \tag{66.5}$$

при $0 \leqslant s \leqslant t$, $s \in D_t$, $t \in D_t$, $0 < \mu \leqslant \bar{\mu}$.

Условие 66.9. *На множестве $t \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant \bar{\mu}$ функция $f(t, \mu)$ имеет непрерывные и ограниченные по норме производные по переменной t до $(n+1)$-го порядка включительно и $f(t, \mu) \in D_f$.*

§ 67. Формулировки теорем о методе пограничных функций

Сформулируем теоремы о близости решения задачи (63.1) к частичной сумме $X_n(t,\mu)$ ряда (64.4), построенного методом пограничных функций,

$$X_n(t,\mu) \equiv \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{2} y_j^{(k)}(\tau_j,\mu)\,\mu^k. \tag{67.1}$$

Теорема 67.1. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_2, κ_{02}, C_2, $\overline{C}_2$, T, *что при* $D_t = \{t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$ *выполняются условия* 66.1–66.9. *Тогда найдутся* $\mu_* > 0$, C_*, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (63.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t,\mu) - X_n(t,\mu)\| \leqslant C_*\, \mu^{n+1} \tag{67.2}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Теорема 67.2. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_1, κ_2, κ_{02}, C_1, C_2, $\overline{C}_2$, *что при* $D_t = \{t\colon\ t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 66.1–66.9 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t,s,\mu)\| \leqslant C_1 \exp\{-\kappa_1(t-s)\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\mu}. \tag{67.3}$$

Тогда найдутся $\mu_* > 0$, C_*, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (63.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t,\mu) - X_n(t,\mu)\| \leqslant C_* \mu^{n+1}$$

при $t \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Теорема 67.3. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_2, κ_{02}, C_1, C_2, $\overline{C}_2$ *и постоянные* $\kappa_1 \geqslant 0$, $C_1^\circ \geqslant 0$, *что при* $D_t = \{t\colon\ t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 66.1–66.9 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t,s,\mu)\| \leqslant C_1^\circ (t-s)^{\kappa_1} + C_1, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\mu}. \tag{67.4}$$

Тогда для любых значений $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < [2(\kappa_1+1)]^{-1}$, *найдутся* $\mu_* > 0$, C_*, $C_*^\circ \geqslant 0$, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (63.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t,\mu) - X_n(t,\mu)\| \leqslant \mu^{n+1} \left[C_*^\circ\, t^{(\kappa_1+1)(2n+1)} + C_*\right]$$

при $0 \leqslant t \leqslant T\mu^{-\chi}$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Теорема 67.4. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_1, κ_2, κ_{02}, C_1, C_2, $\overline{C}_2$, *что при* $D_t = \{t\colon\ t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 66.1–66.9 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t,s,\mu)\| \leqslant C_1 \exp\{\kappa_1(t-s)\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\mu}. \tag{67.5}$$

Тогда для любых значений $T \geqslant 0$, χ, $0 \leqslant \chi < (n+1)\left[(n+2)\kappa_1\right]^{-1}$, *найдутся* $\mu_* > 0$, C_*, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (63.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t,\mu) - X_n(t,\mu)\| \leqslant C_*\, \mu^{n+1} \, \exp\left\{(n+1)\kappa_1 t\right\}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T - \chi \ln \mu$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Здесь $U_1(t, s, \mu)$ — матрица Коши уравнения (65.4).

Из теорем 67.1–67.4 следует, что функция (67.1) является асимптотическим решением задачи (63.1) на отрезке (теорема 67.1), на полуоси теорема 67.2), на асимптотически больших интервалах времени (теоремы 67.3, 67.4). Справедливы равенства

$$x(t,\mu) = X_n(t,\mu) + o(\mu^n), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \mu \to 0 \quad \text{(теорема 67.1)};$$

$$x(t,\mu) = X_n(t,\mu) + o(\mu^n), \quad t \geqslant 0, \quad \mu \to 0 \quad \text{(теорема 67.2)};$$

$$x(t,\mu) = X_n(t,\mu) + o\left(\mu^{n\chi_*}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant T\mu^{-\chi}, \quad \mu \to 0 \quad \text{(теорема 67.3)},$$

$$T,\ \chi \text{ — произвольные числа из множества}$$

$$T > 0, \quad 0 \leqslant \chi < [2(\kappa_1 + 1)]^{-1}, \quad \chi_* = 1 - 2\chi(\kappa_1 + 1);$$

$$x(t,\mu) = X_n(t,\mu) + o\left(\mu^{n\chi_*}\right), \quad 0 \leqslant t \leqslant T - \chi \ln \mu, \quad \mu \to 0 \quad \text{(теорема 67.4)},$$

$$T,\ \chi \text{ — произвольные числа из множества}$$

$$T \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \chi < (2\kappa_1)^{-1}, \quad \chi_* = 1 - 2\kappa_1 \chi.$$

Замечание 67.1. Оценки остаточного члена асимптотического разложения (64.4), интервала времени t, значений малого параметра можно получить, используя теоремы 28.5, 28.6.

Замечание 67.2. Определение 63.1 задачи Коши с двойной сингулярностью дано для отрезка $0 \leqslant t \leqslant T$. Из теорем 67.2–67.4 следует, что при определенных условиях решение задачи Коши с двойной сингулярностью распространяется на бесконечный или на асимптотически большой интервал времени.

Замечание 67.3. Если функции F_1, F_2 не зависят явно от f, то теоремы 67.1–67.4 переходят соответственно в теоремы 28.1–28.4 для $m = 2$.

§ 68. Доказательство теорем 67.1–67.4

Доказательство теорем 67.1–67.4 аналогично доказательству теорем 28.1–28.4, приведенному в главе 4. Нужно только учесть зависимость функций от ν, f и положить $m = 2$. По этой причине приведем только те фрагменты доказательства, которые отличаются от изложенного в главе 4.

68.1. Функция $y_2^{(0)}$

Лемма 68.1. *При выполнении условий* 66.1, 66.2, 66.5, 66.6, 66.9:

1) *функция* $y_2^{(0)}(\tau_2,\nu)$ *существует, единственна и имеет непрерывные производные до* $(n+2)$*-го порядка включительно при* $\tau_2 \geqslant 0$, $0<\nu\leqslant\bar{\mu}$;
2) *найдутся постоянные* C_{02l}, *не зависящие от* t, μ *и такие, что*

$$\left\|\frac{\partial^l y_2^{(0)}(\tau_2,\nu)}{\partial\tau_2^l}\right\| \leqslant C_{02l}\exp\{-\kappa_{02}\tau_2\},\quad \tau_2\geqslant 0,\quad 0<\nu\leqslant\bar{\mu};\quad l=\overline{0,n+2}. \tag{68.1}$$

Отметим, что в условие 66.7 входит функция $y_2^{(0)}(\tau_2,\nu)$. Поэтому формулировать условие 66.7 нужно после доказательства ее существования. Здесь доказательство вынесено в § 68 для удобства чтения.

Доказательство леммы 68.1. По условию 66.5 $y_1^{(0)}(t,\mu)=0$. Из формулы (65.1) следует, что

$$y_2^{(0)}=(0,\ y_{22}^{(0)}), \tag{68.2}$$

где $y_{22}^{(0)}$ — решение задачи (65.7). Из условий 66.1, 66.5 следует, что при $\mu=\nu$ дифференциальное уравнение (65.7) совпадает с присоединенным уравнением (66.2), которое при заданном начальном условии эквивалентно интегральному уравнению

$$r_2(\tau_2,\mu)=\overline{U}_2(\tau_2,0,\mu)\cdot r_2(0,\mu)+ \tag{68.3}$$

$$+\int\limits_0^{\tau_2}\overline{U}_2(\tau_2,\sigma_2,\mu)\cdot\Delta F_2\Big(r_2(\sigma_2,\mu),f(\sigma_2\mu^{K_2},\mu)\Big)\,d\sigma_2,$$

где $\overline{U}_2$ — матрица Коши уравнения (66.3),

$$\Delta F_2(r_2,f)\equiv\Big[F_2(\tilde{r},0,0,f)-F_2(0,0,0,f)-\frac{\partial F_2}{\partial x_2}(0,0,0,f)\,r_2\Big],\quad \tilde{r}=(0,r_2).$$

Рассмотрим функцию ΔF_2.

$$\Delta F_2(r_2,f)=\int\limits_0^1\left[\frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\theta\tilde{r},0,0,f)-\frac{\partial F_2}{\partial x_2}(0,0,0,f)\right]\,r_2\,d\theta= \tag{68.4}$$

$$=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\sum_{j=1}^{N_2}\frac{\partial^2F_2}{\partial x_2\partial x_{2j}}(\theta\theta_1\tilde{r},0,0,f)\,r_2r_{2j}\,d\theta,$$

$$\|\Delta F_2(r_2,f)\|\leqslant C\|r_2\|^2\quad\text{при } r_2\in D_2,\ f\in D_f.$$

По теореме о существовании и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений [4] существует такое значение $\tau_{2*} > 0$, что при $r_2(0,\mu) \in D_2$, $0 \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{2*}$, $0 < \mu \leqslant \bar{\mu}$ решение $r_2(\tau_2,\mu)$ уравнения (66.2) существует, единственно и принадлежит D_2. Из (68.3), (68.4) и условия 66.6а получим неравенство на отрезке $0 \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{2*}$:

$$\|r_2(\tau_2,\nu)\| \leqslant \|\overline{U}_2(\tau_2,0,\mu)\| \cdot \|r_2(0,\mu)\| +$$

$$+ \int\limits_0^{\tau_2} \|\overline{U}_2(\tau_2,\sigma_2,\nu)\| \cdot \left\| \Delta F_2\Big(r_2(\sigma_2,\mu), f(\sigma_2\mu^{K_2},\mu)\Big)\right\| d\sigma_2 \leqslant$$

$$\leqslant \overline{C}_2 \exp\{-\kappa_{02}\tau_2\} \cdot \|r_2(0,\mu)\| + \int\limits_0^{\tau_2} C \exp\Big\{-\kappa_{02}(\tau_2-\sigma_2)\Big\}\|r_2(\sigma_2,\mu)\|^2 d\sigma_2.$$

Обозначим

$$\omega(\tau_2) \equiv \exp\{\kappa_{02}\tau_2\} \cdot \|r_2(\tau_2,\mu)\|.$$

Тогда при $0 \leqslant \tau_2 \leqslant \tau_{2*}$

$$\omega(\tau_2) \leqslant C_3 + \int\limits_0^{\tau_2} C_4 \exp\{-\kappa_{02}\sigma_2\}\omega^2(\sigma_2)\, d\sigma_2, \quad C_3 \equiv \overline{C}_2\, \|r_2(0,\mu)\|,$$

$$\omega^2(\tau_2) \leqslant \left[C_3 + \int\limits_0^{\tau_2} C_4 \exp\{-\kappa_{02}\sigma_2\}\omega^2(\sigma_2)\, d\sigma_2\right]^2,$$

$$\frac{C_4 \exp\{-\kappa_{02}\tau_2\}\omega^2(\tau_2)}{\left[C_3 + \int\limits_0^{\tau_2} C_4\ \exp\{-\kappa_{02}\sigma_2\}\omega^2(\sigma_2)\, d\sigma_2\right]^2} \leqslant C_4 \exp\{-\kappa_{02}\tau_2\}.$$

Проинтегрируем неравенство:

$$C_3^{-1} - \left[C_3 + \int\limits_0^{\tau_2} C_4 \exp\{-\kappa_{02}\sigma_2\}\omega^2(\sigma_2)\, d\sigma_2\right]^{-1} \leqslant \tag{68.5}$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\tau_2} C_4 \exp\{-\kappa_{02}\sigma_2\}\, d\sigma_2 \leqslant C_5,$$

$$C_3 + \int\limits_0^{\tau_2} C_4\ \exp\{-\kappa_{02}\sigma_2\}\omega^2(\sigma_2)\, d\sigma_2 \leqslant C_3(1 - C_3C_5)^{-1},$$

$$\omega(\tau_2) \leqslant C_3(1 - C_3C_5)^{-1},$$

$$\|r_2(\tau_2,\mu)\| \leqslant C_3(1-C_3C_5)^{-1}\exp\{-\kappa_{02}\tau_2\} =$$
$$= \frac{\overline{C}_2\,\|r_2(0,\mu)\|}{1-\overline{C}_2C_5\,\|r_2(0,\mu)\|}\,\exp\{-\kappa_{02}\tau_2\}.$$

Здесь использована положительность разности $(1-C_3C_5)$ при малых значениях $\|r_2(0,\mu)\|$.

Неравенство (68.5) для $r_2(\tau_2,\mu)$ выполняется на отрезке $0\leqslant\tau_2\leqslant\tau_{2*}$. Из этого неравенства по теореме о продолжении решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений [4] следует: существует такое непустое множество $D_{2*}\Big($область влияния нулевого решения уравнения (66.2)$\Big)$, что при $r_2(0,\nu)\in D_{2*}$ решение задачи (66.2) существует, единственно и удовлетворяет неравенству (68.5) при $\tau_2\geqslant 0$, $r_2(\tau_2,\nu)\to 0$ при $\tau_2\to\infty$. Отсюда, из условия 66.6б и из (65.7) следует: решение $y_{22}^{(0)}(\tau_2,\nu)$ существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|y_{22}^{(0)}(\tau_2,\nu)\| \leqslant C\exp\{-\kappa_{02}\tau_2\}$$

при $\tau_2\geqslant 0$, $0<\nu\leqslant\bar{\mu}$. Так как $\|y_2^{(0)}(\tau_2,\nu)\| = \|y_{22}^{(0)}(\tau_2,\nu)\|$, то получаем, что неравенство (68.1) справедливо при $l=0$.

Из условий 66.2, 66.5, 66.9 следует, что правая часть дифференциального уравнения (65.7) имеет непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно по $y_{22}^{(0)}$, τ_2. Поэтому $y_2^{(0)}(\tau_2,\nu)$ имеет непрерывные производные до $(n+2)$-го порядка включительно при $\tau_2\geqslant 0$, $0<\nu\leqslant\bar{\mu}$. Запишем дифференциальное уравнение (65.7) в виде

$$\frac{\partial y_{22}^{(0)}(\tau_2,\nu)}{\partial\tau_2} = \int_0^1 \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\Big(\theta\bar{y}_2^{(0)}(\tau_2,\nu),0,0,f(\tau_2\nu^{K_2},\nu)\Big)\,d\theta\; y_{22}^{(0)}(\tau_2,\nu). \tag{68.6}$$

Проведем доказательство по индукции. Пусть $l\geqslant 1$. Предположим, что неравенства (68.1) выполняются для производных порядка $0,\ \ldots,\ l-1$. Продифференцируем уравнение (68.6) $(l-1)$ раз по τ_2. Получим формулу для производной l-го порядка $\partial^l y_{22}^{(0)}/\partial\tau_2^l = \ldots$. Здесь многоточием обозначены линейные комбинации производных $\partial^k y_{22}^{(0)}(\tau_2,\nu)/\partial\tau_2^k$, $k=\overline{0,l-1}$, с ограниченными по норме коэффициентами. Отсюда следуют оценки

$$\left\|\frac{\partial^l y_{22}^{(0)}(\tau_2,\nu)}{\partial\tau_2^l}\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{l-1} C_k\left\|\frac{\partial^k y_{22}^{(0)}(\tau_2,\nu)}{\partial\tau_2^k}\right\| \leqslant C\exp\{-\kappa_{02}\tau_2\}.$$

Таким образом, при сделанном предположении получили, что неравенство (68.1) справедливо для производной l-го порядка. Так как для производной нулевого порядка (68.1) доказано, то по индукции неравенства (68.1) справедливы для всех l, $l=\overline{0,n+2}$. □

68.2. Матрица $\widetilde{U}_2$

Лемма 68.2. *При выполнении условий* 66.1, 66.2, 66.5–66.7, 66.9 *на множестве* $0 \leqslant \sigma_2 \leqslant \tau_2$, $0 < \nu \leqslant \bar{\mu}$ *матрица Коши* $\widetilde{U}_2(\tau_2, \sigma_2, \nu)$ *уравнения* (65.9) *существует, единственна и удовлетворяет неравенству*

$$\|\widetilde{U}_2(\tau_2, \sigma_2, \nu)\| \leqslant \widetilde{C}_2 \exp\big\{-\varkappa_{02}(\tau_2 - \sigma_2)\big\}. \tag{68.7}$$

Доказательство. Существование и единственность матрицы $\widetilde{U}_2(\tau_2, \sigma_2, \nu)$ при $0 \leqslant \sigma_2 \leqslant \tau_2$, $0 < \nu \leqslant \bar{\mu}$ следует из гладкости правой части уравнения (65.9) на полуоси $\tau_2 \geqslant 0$. Запишем уравнения для $\widetilde{U}_2(\tau_2, \sigma_2, \nu)$ в следующем виде:

$$\frac{\partial \widetilde{U}_2}{\partial \tau_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\Big(0, 0, 0, f\Big) \cdot \widetilde{U}_2 + \Delta A(\tau_2, \nu) \cdot \widetilde{U}_2, \quad \widetilde{U}_2(\sigma_2, \sigma_2, \nu) = E_2, \tag{68.8}$$

$$\Delta A(\tau_2, \nu) \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\Big(y_2^{(0)}(\tau_2, \nu), 0, 0, f\Big) - \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\Big(0, 0, 0, f\Big),$$

$$f = f(\tau_2 \nu^{K_2}, \nu).$$

Эти уравнения эквивалентны интегральному уравнению

$$\widetilde{U}_2(\tau_2, \sigma_2, \nu) = \overline{U}_2(\tau_2, \sigma_2, \nu) + \int\limits_{\sigma_2}^{\tau_2} \overline{U}_2(\tau_2, \sigma, \nu) \cdot \Delta A(\sigma, \nu) \cdot \widetilde{U}_2(\sigma, \sigma_2, \nu)\, d\sigma. \tag{68.9}$$

Оценим разность $\Delta A(\tau_2, \nu)$ из (68.1), используя лемму 68.1.

$$\Delta A(\tau_2, \nu) = \int\limits_0^1 \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial x_{2j}} \Big(\theta y_2^{(0)}(\tau_2, \nu), 0, 0, f(\tau_2 \nu^{K_2}, \nu)\Big)\, d\theta \times \tag{68.10}$$

$$\times\, y_{2j}^{(0)}(\tau_2, \nu),$$

$$\|\Delta A(\tau_2, \nu)\| \leqslant C\|y_2^{(0)}(\tau_2, \nu)\| \leqslant C \exp\{-\varkappa_{02}\tau_2\}, \quad \tau_2 \geqslant 0, \quad 0 < \nu \leqslant \bar{\mu}.$$

Из (68.9), (68.10) и из условия 66.6а следует, что

$$\|\widetilde{U}_2(\tau_2, \sigma_2, \nu) \leqslant \overline{C}_2 \exp\big\{-\varkappa_{02}(\tau_2 - \sigma_2)\big\} +$$

$$+ \int\limits_{\sigma_2}^{\tau_2} C \exp\{-\varkappa_{02}\tau_2\} \|\widetilde{U}_2(\sigma, \sigma_2, \nu)\|\, d\sigma.$$

Функция $\omega(\tau_2) \equiv \|\widetilde{U}_2(\tau_2, \sigma_2, \nu)\| \cdot \exp\{\varkappa_{02}\tau_2\}$ удовлетворяет неравенству

$$\omega(\tau_2) \leqslant \overline{C}_2 \exp\{\varkappa_{02}\sigma_2\} + \int\limits_{\sigma_2}^{\tau_2} C \exp\{-\varkappa_{02}\sigma\} \omega(\sigma)\, d\sigma.$$

По лемме Гронуолла — Беллмана 13.1 отсюда следует, что

$$\omega(\tau_2) \leqslant \overline{C}_2 \exp\left\{\varkappa_{02}\sigma_2 + \int\limits_{\sigma_2}^{\tau_2} C \exp\{-\varkappa_{02}\sigma\}d\sigma\right\} = \overline{C}_2 \exp\left\{\varkappa_{02}\sigma_2 + \right.$$

$$\left. +C\Big[\big\{\exp\{-\varkappa_{02}\sigma_2\} - \exp\{-\varkappa_{02}\tau_2\}\Big]\right\} \leqslant C\exp\{\varkappa_{02}\sigma_2\}, \quad \tau_2 \geqslant \sigma_2.$$

Для матрицы Коши получаем следующую оценку:

$$\|\widetilde{U}_2(\tau_2, \sigma_2, \nu)\| = \omega(\tau_2)\cdot\exp\{-\varkappa_{02}\tau_2\} \leqslant C\exp\big\{-\varkappa_{02}(\tau_2 - \sigma_2)\big\}. \qquad \square$$

68.3. Функции $y_2^{(k)}$

Лемма 68.3. *При выполнении условий* 66.1–66.7, 66.9: 1) *функции* $y_2^{(k)}(\tau_2, \nu)$ *существуют, единственны и имеют непрерывные производные по* τ_2 *до* $(n+1-k)$*-го порядка включительно на множестве* $\tau_2 \geqslant 0$, $0 < \nu \leqslant \bar{\mu}$, $k = \overline{0, n}$; 2) *найдутся постоянные* C_{k2l}, $\varkappa_{k2} > 0$, *не зависящие от* τ_2, ν *и такие, что*

$$\left\|\frac{\partial^l y_2^{(k)}(\tau_2, \nu)}{\partial\tau_2^l}\right\| \leqslant C_{k2l}e^{-\varkappa_{k2}\tau_2}, \quad \tau_2 \geqslant 0, \quad 0 < \nu \leqslant \bar{\mu},$$

$$k = \overline{0, n}, \quad l = \overline{0, n+1-k}.$$

Доказательство леммы 68.3 аналогично доказательству леммы 34.1. Нужно только заменить утверждение 34.4 на лемму 68.2 и учесть зависимость функций от ν, f и равенство $m = 2$. $\square$

68.4. Функции $y_1^{(k)}$

Лемма 68.4. *При выполнении условий теорем* 67.1–67.4: 1) *функции* $y_1^{(k)}(t, \nu)$, $k = \overline{1, n}$, $n \geqslant 1$, *существуют, единственны и имеют непрерывные производные по* t *до порядка* $(n+2-k)$ *включительно на множестве* $D_t \ni t$, $0 < \nu \leqslant \bar{\mu}$; 2) *найдутся постоянные* C_{k1l}, C°_{k1l}, *не зависящие от* t, ν *и такие, что при* $t \in D_t$, $0 < \nu \leqslant \bar{\mu}$, $k = \overline{1, n}$, $l = \overline{0, n+2-k}$ *выполняются неравенства*

$$\left\|\frac{\partial^l y_1^{(k)}(t, \nu)}{\partial t^l}\right\| \leqslant \begin{cases} C_{k1l} & \text{для теорем 67.1, 67.2,} \\ C^{\circ}_{k1l}\, t^{(\varkappa_1+1)(2k-1)} + C_{k1l} & \text{для теоремы 67.3,} \\ C_{k1l}\, \exp\{k\varkappa_1 t\} & \text{для теоремы 67.4.} \end{cases}$$

Доказательство леммы 68.4 аналогично доказательству леммы 35.1 (с учетом зависимости функций от ν, f и равенства $m = 2$). Только нужно доказать ограниченность нормы матрицы $U_1(t, s, \nu)$ для теоремы 67.1.

Матрица Коши $U_1(t, s, \nu)$ представима в виде сходящегося ряда [17]

$$U_1(t, s, \nu) = E_1 + \int_s^t \widetilde{A}_1(q_1, \nu)\, dq_1 + \int_s^t \int_s^{q_1} \widetilde{A}_1(q_1, \nu)\, \widetilde{A}_1(q_2, \nu)\, dq_2 dq_1 + \ldots,$$

где $\widetilde{A}_1(t, \nu)$ — матрица (65.4). При $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \nu \leqslant \bar{\mu}$ выполняется неравенство $\|\widetilde{A}_1(t, \nu)\| \leqslant C$. Поэтому

$$\|U_1(t, s, \nu)\| \leqslant \|E_1\| + \int_s^t C\, dq_1 + \int_s^t \int_s^{q_1} C^2\, dq_2 dq_1 + \ldots =$$

$$= 1 + C(t - s) + \frac{1}{2}\, [C(t - s)]^2 + \ldots = \exp\{C(t - s)\} \leqslant C. \quad \square$$

68.5. Окончание доказательства теорем 67.1–67.4

Далее доказательство аналогично доказательству теорем 28.1–28.4 в § 36–§ 40. Нужно только учесть зависимость функций от ν, f и равенство $m = 2$. Теоремы 67.1–67.4 доказаны.

§ 69. Теоремы о предельном переходе

Сформулируем теоремы о пределе решения задачи Коши с двойной сингулярностью при стремлении малого параметра к нулю.

Теорема 69.1. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_2, κ_{02}, C_2, $\overline{C}_2$, T, *что при* $n = 0$, $D_t = \{t\colon\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ *выполняются условия* 66.1–66.9. *Тогда*:

1) *найдется* $\mu_* > 0$, *не зависящая от* t, μ *и такая, что решение задачи* (63.1) *существует и единственно при* $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$;
2) $$\lim_{\mu \to 0+0} \|x_1(t, \mu) - \bar{x}_1(t, \mu)\| = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$\lim_{\mu \to 0+0} \|x_2(t, \mu) - \bar{x}_2(t, \mu)\| = 0, \quad 0 < t \leqslant T;$$
3) $\|x_1(t, \mu) - \bar{x}_1(t, \mu)\| \to 0$ *равномерно на множестве* $0 \leqslant t \leqslant T$; *для любого* t_1, $0 < t_1 < T$, $\|x_2(t, \mu) - \bar{x}_2(t, \mu)\| \to 0$ *равномерно на множестве* $t_1 \leqslant t \leqslant T$.

Теорема 69.2. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_1, κ_2, κ_{02}, C_1, C_2, $\overline{C}_2$, *что при* $n = 0$, $D_t = \{t\colon\ t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 66.1–66.9 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t, s, \mu)\| \leqslant C_1 \exp\{-\kappa_1(t - s)\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\mu}.$$

Тогда:

1) *найдется* $\mu_* > 0$, *не зависящая от* t, μ *и такая, что решение задачи* (63.1) *существует и единственно при* $t \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$;

2) $\lim\limits_{\mu\to 0+0} \|x_1(t,\mu) - \bar{x}_1(t,\mu)\| = 0, \quad t \geqslant 0,$

   $\lim\limits_{\mu\to 0+0} \|x_2(t,\mu) - \bar{x}_2(t,\mu)\| = 0, \quad t > 0;$

3) $\|x_1(t,\mu) - \bar{x}_1(t,\mu)\| \to 0$ *равномерно на множестве* $t \geqslant 0$; *для любого* t_1, $t_1 > 0$, $\|x_2(t,\mu) - \bar{x}_2(t,\mu)\| \to 0$ *равномерно на множестве* $t \geqslant t_1$.

Здесь $\bar{x}(t,\mu) = 0$ — решение вырожденной задачи (63.2), $\bar{x}(t,\mu) = y_1^{(0)}(t,\mu)$, $y_1^{(0)}(t,\mu)$ — коэффициент в асимптотике (64.4).

Доказательство теорем 69.1, 69.2. Первое утверждение теорем 69.1, 69.2 следует из теорем 67.1, 67.2, так как условия теорем при $n = 0$ совпадают. По лемме 68.1 справедливо неравенство

$$\|y_2^{(0)}(\tau_2,\nu)\| \leqslant C \exp\big\{-\kappa_{02}\tau_2\big\}, \quad \tau_2 \geqslant 0, \quad 0 < \nu \leqslant \bar{\mu}. \tag{69.1}$$

По формулам (65.1) $y_{21}^{(0)}(\tau_2,\mu) = 0$. По условию 66.5 $y_1^{(0)}(\tau_1,\mu) = 0$. Отсюда и из (67.1), (69.1) следуют неравенства

$$\|x_1(t,\mu)\| \leqslant \|x_1(t,\mu) - X_{01}(t,\mu)\| + \|X_{01}(t,\mu)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x(t,\mu) - X_0(t,\mu)\| + \Big\|\sum_{j=1}^{2} y_{j1}^{(0)}(\tau_j,\mu)\Big\| = \|x(t,\mu) - X_0(t,\mu)\|,$$

$$\|x_2(t,\mu)\| \leqslant \|x(t,\mu)\| \leqslant \|x(t,\mu) - X_0(t,\mu)\| + \|X_0(t,\mu)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x(t,\mu) - X_0(t,\mu)\| + \Big\|\sum_{j=1}^{2} y_j^{(0)}(\tau_j,\mu)\Big\| =$$

$$= \|x(t,\mu) - X_0(t,\mu)\| + \|y_2^{(0)}(\tau_2,\mu)\| \leqslant \|x(t,\mu) - X_0(t,\mu)\| + C\exp\{-\kappa_{02}\tau_2\}.$$

Отсюда и из теорем 67.1, 67.2 получаем:

$$\begin{gathered}\|x_1(t,\mu)\| \leqslant C_*\mu, \quad \|x_2(t,\mu)\| \leqslant C_*\mu + C\exp\{-\kappa_{02}t\mu^{-K_2}\}, \\ t \in D_t, \quad 0 < \mu \leqslant \mu_*.\end{gathered} \tag{69.2}$$

Так как постоянные C_*, C, κ_{02} не зависят от t, μ, $\exp\big\{-\kappa_{02}t\mu^{-K_2}\big\} \leqslant \exp\{-\kappa_{02}t_1\mu^{-K_2}\}$ при $t \geqslant t_1$, $\bar{x}(t,\mu) = 0$, то из (69.2) следуют утверждения 2, 3. Теоремы 69.1, 69.2 доказаны.

Замечание 69.1. Если правые части дифференциальных уравнений (63.1) не зависят от f, то теоремы 69.1, 69.2 переходят в теоремы 30.1, 30.2 для $m = 2$.

§ 70. Пример применения метода пограничных функций

Пример 70.1. Рассмотрим задачу

$$\frac{dx_1}{dt} = \left[1 + a\cos\left(\frac{t}{\mu^2}\right)\right](x_1+\mu)(x_1+\mu-1), \quad x_1|_{t=0} = 0, \tag{70.1}$$

$$\mu\,\frac{dx_2}{dt} = -\left[1 + a\cos\left(\frac{t}{\mu^2}\right)\right] x_2, \quad x_2|_{t=0} = 1, \quad |a| < 1.$$

Здесь за функцию f можно принять

$$f(t,\mu) \equiv 1 + a\cos\left(\frac{t}{\mu^2}\right), \quad 1 - |a| \leqslant |f| \leqslant 1 + |a|.$$

Вспомогательные уравнения (64.1) для задачи (70.1) имеют вид

$$\frac{dy_{11}}{dt} = \left[1 + a\cos\left(\frac{t}{\nu^2}\right)\right](y_{11}+\mu)(y_{11}+\mu-1), \tag{70.2}$$

$$\mu\,\frac{dy_{12}}{dt} = -\left[1 + a\cos\left(\frac{t}{\nu^2}\right)\right] y_{12},$$

$$\frac{dy_{21}}{d\tau_2} = \mu\left[1 + a\cos\left(\frac{\tau_2}{\nu}\right)\right](2y_{11}+y_{21}+2\mu-1)\,y_{21},$$

$$\frac{dy_{22}}{d\tau_2} = -\left[1 + a\cos\left(\frac{\tau_2}{\nu}\right)\right] y_{22}, \quad \lim_{\tau_2\to\infty} y_{21}(\tau_2,\mu,\nu) = 0,$$

$$y_{11}(0,\mu,\nu) + y_{21}(0,\mu,\nu) = 0, \quad y_{12}(0,\mu,\nu) + y_{22}(0,\mu,\nu) = 1.$$

Для задачи (70.1) справедливы равенства (обозначения смотрите в § 64 — § 66)

$$y_1^{(0)} = 0, \quad y_2^{(0)}(\tau_2,\nu) = \Big(0, \exp\left\{g_2(\tau_2,\nu)\right\}\Big), \quad g_2(\tau_2,\nu) \equiv -\tau_2 - a\nu\sin\left(\frac{\tau_2}{\nu}\right),$$

$$U_1(t,s,\nu) = \exp\left\{g_1(t,\nu) - g_1(s,\nu)\right\}, \quad g_1(t,\nu) \equiv -t - a\nu^2\sin\left(\frac{t}{\nu^2}\right),$$

$$U_2(t,s,\mu) = \exp\left\{g_2\left(\frac{t}{\mu},\mu\right) - g_2\left(\frac{s}{\mu},\mu\right)\right\},$$

$$\overline{U}_2(\tau_2,\sigma_2,\mu) = \exp\left\{g_2(\tau_2,\mu) - g_2(\sigma_2,\mu)\right\}, \quad H_1(x,t,\mu,f) = -\frac{1}{f}.$$

Присоединенное уравнение имеет вид

$$\frac{dr_2}{d\tau_2} = -\left[1 + a\cos\left(\frac{\tau_2}{\mu}\right)\right] r_2.$$

Подставляя ряды (64.3) в уравнения (70.2), можно найти функции y_{ij}:

$$y_{11}(t,\mu,\nu)=\frac{\mu(\mu-1)[1-\exp\{g_1(t,\nu)\}]}{1-\mu+\mu\exp\{g_1(t,\nu)\}},\quad y_{12}=0,$$

$$y_{21}=0,\quad y_{22}(\tau_2,\mu,\nu)=\exp\{g_2(\tau_2,\nu)\}.$$

Решение задачи (70.1) описывается формулами

$$x_1(t,\mu)=\frac{\mu(\mu-1)[1-\exp\{g_1(t,\mu)\}]}{1-\mu+\mu\exp\{g_1(t,\mu)\}},\quad x_2(t,\mu)=\exp\left\{g_2\left(\frac{t}{\mu},\mu\right)\right\}. \tag{70.3}$$

Оно существует при $t\geqslant 0$, $0<\mu\leqslant 1$ и при $0\leqslant t<t_*$, $\mu>1$, где t_* — минимальный положительный корень уравнения

$$t+a\mu^2\sin\left(\frac{t}{\mu^2}\right)=\ln\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right).$$

Асимптотическое решение, построенное методом пограничных функций, имеет вид

$$X_{n1}(t,\mu)=\mu\left[\exp\{g_1(t,\mu)\}-1\right]_{(n\geqslant1)}+ \tag{70.4}$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\mu^k\exp\{g_1(t,\mu)\}\left[1-\exp\{g_1(t,\mu)\}\right]^{k-1}_{(n\geqslant2)},$$

$$X_{n2}(t,\mu)=\exp\left\{g_2\left(\frac{t}{\mu},\mu\right)\right\}.$$

Остаточные члены асимптотики равны соответственно

$$x(t,\mu)-X_0(t,\mu)=\frac{\mu(\mu-1)[1-\exp\{g_1(t,\mu)\}]}{1-\mu+\mu\exp[g_1(t,\mu)]}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$x(t,\mu)-X_n(t,\mu)=\frac{\mu^{n+1}\exp\{g_1(t,\mu)\}[1-\exp\{g_1(t,\mu)\}]^n}{1-\mu+\mu\exp\{g_1(t,\mu)\}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ n\geqslant1.$$

Правые части ограничены по модулю функцией $C_*\mu^{n+1}$. Отсюда следует, что (70.4) является асимптотическим решением задачи (70.1) на полуоси $t\geqslant0$ при $\mu\to0$. При этом

$$x(t,\mu)=X_n(t,\mu)+O(\mu^{n+1}),\quad t\geqslant0,\quad \mu\to0.$$

Вырожденная для (70.1) задача имеет вид

$$\frac{d\bar x_1}{dt}=\left[1+a\cos\left(\frac{t}{\mu^2}\right)\right]\bar x_1\,(\bar x_1-1),\quad \bar x_1|_{t=0}=0,\quad \bar x_2=0. \tag{70.5}$$

Ее решение равно нулю: $\bar x=0$.

Задача (70.1) не удовлетворяет условию 66.9, поэтому теоремы 67.1–67.4 к задаче не применимы. Тем не менее из (70.5) следует, что метод пограничных функций дает хорошее приближение решения задачи (70.1).

Замечание 70.1. Если вместо постоянной a взять функцию $a=b\mu^{2(n+1)}$, где b — постоянная, то задача (70.1) будет удовлетворять условиям теорем 67.1–67.4, 69.1, 69.2.

Замечание 70.2. Из примера 70.1 следует, что метод пограничных функций применим к более широкому классу задач, чем охватывают теоремы 67.1–67.4.

Замечание 70.3. Пример 70.1 совпадает с примером 74.1. Если $a = 0$, то пример 70.1 совпадает с примером 31.7.

§ 71. Выводы главы 8

В главе 8 рассмотрен *метод пограничных функций* для решения *задачи Коши с двойной сингулярностью*. Определение задачи Коши с двойной сингулярностью дано в § 63. В § 64, § 65 методом пограничных функций построено асимптотическое решение задачи. В § 66 даны условия, налагаемые на рассматриваемую задачу. В § 67 сформулированы теоремы о том, что построенное решение является асимптотическим на отрезке (теорема 67.1), на полуоси $t \geqslant 0$ (теорема 67.2) и на асимптотически больших интервалах времени (теоремы 67.3, 67.4). В § 68 дано доказательство теорем 67.1–67.4.

В § 69 даны теоремы о предельном переходе: при стремлении малого параметра к нулю разность решений исходной задачи и задачи вырожденной стремится к нулю на интервале $0 < t \leqslant T$ (теорема 69.1) и на полуоси $t > 0$ (теорема 69.2).

В § 70 дан пример решения задачи Коши с двойной сингулярностью методом пограничных функций.

Глава 9

Метод двух параметров

§ 72. Построение асимптотического решения методом двух параметров

Рассмотрим задачу Коши с двойной сингулярностью (63.1). Вместе с ней рассмотрим задачу, содержащую два малых параметра μ и ε:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= F_1\Big(z, t, \varepsilon, f(t, \mu)\Big), \qquad z_1|_{t=0} = x_1^\circ(\varepsilon), \\ \mu^{K_2}\frac{dz_2}{dt} &= F_2\Big(z, t, \varepsilon, f(t, \mu)\Big), \qquad z_2|_{t=0} = x_2^\circ(\varepsilon). \end{aligned} \tag{72.1}$$

Здесь z_i — N_i-мерный вектор, $z = (z_1, z_2)$.

Изложим идею метода двух параметров. Пусть хотя бы одна из функций F_i, x_i° в (72.1) зависит явно от малого параметра ε. Тогда при каждом фиксированном значении μ (72.1) является регулярно возмущенной задачей Коши с малым параметром ε и ее решение можно построить методом малого параметра Пуанкаре в виде ряда Пуанкаре (смотрите § 1)

$$z(t, \mu, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t, \mu)\, \varepsilon^k. \tag{72.2}$$

Тогда решение задачи (63.1) примет вид

$$\boxed{x(t, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t, \mu)\mu^k.} \tag{72.3}$$

Опишем алгоритм построения уравнений для коэффициентов ряда (72.2), предполагая, что все операции имеют смысл:

- ряды (72.2) подставляем в уравнения (72.1);
- разлагаем левые и правые части уравнений в ряды по степеням параметра ε;
- приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

После указанных операций получаем уравнения для $z^{(k)}(t, \mu)$. При $k = 0$ уравнения имеют вид

$$\mu^{K_i}\,\frac{dz_i^{(0)}}{dt} = F_i\big(z^{(0)}, t, 0, f(t, \mu)\big), \quad z_i^{(0)}(0, \mu) = x_i^\circ(0), \tag{72.4}$$

$$i = 1, 2, \quad z^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)}), \quad K_1 = 0.$$

При $k \geqslant 1$ уравнения следующие:

$$\mu^{K_i} \frac{dz_i^{(k)}}{dt} = F_{iz}\big(z^{(0)}(t,\mu), t, 0, f(t,\mu)\big)\, z^{(k)} + \tag{72.5}$$

$$+ \left[F_i \left(\sum_{j=0}^{k-1} z^{(j)}(t,\mu)\,\varepsilon^j, t, \varepsilon, f(t,\mu) \right) \right]^{(k)},$$

$$z_i^{(k)}(0,\mu) = [x_i^\circ(\varepsilon)]^{(k)}, \quad i = \overline{1,2}, \quad z^{(k)} = (z_1^{(k)}, z_2^{(k)}).$$

В главе 9 скобки с верхним индексом $^{(k)}$ обозначают коэффициент при ε^k в разложении функции, стоящей в скобках, в ряд по степеням ε. Из уравнений видно, что $z^{(k)}(t,\mu)$ вычисляются последовательно для $k = 0, 1, \ldots$. При $k \geqslant 1$ функция $z^{(k)}(t,\mu)$ является решением линейной задачи Коши (72.5).

Замечание 72.1. Если правые части дифференциальных уравнений и начальные значения задачи (72.1) не зависят от малого параметра ε, то метод двух параметров не применим, так как в этом случае ряд (72.3) состоит из одного (первого) члена, совпадающего с точным решением задачи (63.1).

§ 73. Теоремы о методе двух параметров

73.1. Точное решение

Обозначим через $\mathbf{C}(D_x)$ окрестность точки $x = 0$ в N-мерном векторном пространстве $\mathbf{C}^N$ комплексных чисел, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^1$. Пересечение $\mathbf{C}(D_x)$ с вещественной плоскостью $\operatorname{Im} x = 0$ совпадает с D_x. Обозначим через U_1 матрицу Коши уравнения (65.4).

Сформулируем теоремы о сходимости ряда (72.3) к решению задачи (63.1). Для этого наложим на задачу (63.1) дополнительные условия.

Условие 73.1. *Функции $F_i(x, t, \mu, f)$ непрерывны по совокупности аргументов, аналитичны по x, μ и ограничены по норме при $x \in \mathbf{C}(D_x) \subset \mathbf{C}^N$, $t \in D_t$, $|\mu| \leqslant \bar{\mu}$, $\mu \in \mathbf{C}$, $f \in D_f$, $i = 1, 2$.*

Условие 73.2. *Функции $x_i^\circ(\mu)$ аналитичны при $|\mu| \leqslant \bar{\mu}$, $\mu \in \mathbf{C}$, $i = 1, 2$.*

Теорема 73.1. *Пусть существуют такие положительные постоянные $\bar{\mu}$, κ_2, κ_{02}, C_2, $\overline{C}_2$, T, что при $D_t = \{t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $n = 0$ выполняются условия* 66.1–66.9, 73.1, 73.2. *Тогда найдется постоянная $\mu_* > 0$, не зависящая от t, μ и такая, что на множестве $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$:* 1) *решение задачи* (63.1) *существует и единственно*; 2) *ряд* (72.3) *сходится равномерно к решению задачи* (63.1).

Теорема 73.2. *Пусть существуют такие положительные постоянные $\bar{\mu}$, κ_1, κ_2, κ_{02}, C_1, C_2, $\bar{C}_2$, что при $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$, $n = 0$ выполняются условия* 66.1–66.9, 73.1, 73.2 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t, s, \mu)\| \leqslant C_1 \exp\{-\kappa_1(t-s)\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\mu}. \qquad (73.1)$$

Тогда найдется постоянная $\mu_* > 0$, не зависящая от t, μ и такая, что на множестве $t \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$: 1) решение задачи (63.1) *существует и единственно;* 2) *ряд* (72.3) *сходится равномерно к решению задачи* (63.1).

Теорема 73.3. *Пусть существуют такие положительные постоянные $\bar{\mu}$, κ_2, κ_{02}, C_1, C_2, $\bar{C}_2$ и постоянные $\kappa_1 \geqslant 0$, $C_1^\circ \geqslant 0$, что при $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$, $n = 0$ выполняются условия* 66.1–66.9, 73.1, 73.2 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t, s, \mu)\| \leqslant C_1^\circ (t-s)^{\kappa_1} + C_1, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\mu}. \qquad (73.2)$$

Тогда для любых значений $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < [2(\kappa_1+1)]^{-1}$, найдется постоянная $\mu_* > 0$, не зависящая от t, μ и такая, что на множестве $0 \leqslant t \leqslant T\mu^{-\chi}$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$: 1) решение задачи (63.1) *существует и единственно;* 2) *ряд* (72.3) *сходится равномерно к решению задачи* (63.1).

Теорема 73.4. *Пусть существуют такие положительные постоянные $\bar{\mu}$, κ_1, κ_2, κ_{02}, C_1, C_2, $\bar{C}_2$, что при $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$, $n = 0$ выполняются условия* 66.1–66.9, 73.1, 73.2 *и справедливо неравенство*

$$\|U_1(t, s, \mu)\| \leqslant C_1 \exp\{\kappa_1(t-s)\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \quad 0 < \mu \leqslant \bar{\mu}. \qquad (73.3)$$

Тогда для любых значений $T \geqslant 0$, χ, $0 \leqslant \chi < (2\kappa_1)^{-1}$, найдется постоянная $\mu_* > 0$, не зависящая от t, μ и такая, что на множестве $0 \leqslant t \leqslant T - \chi \ln \mu$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$: 1) решение задачи (63.1) *существует и единственно;* 2) *ряд* (72.3) *сходится равномерно к решению задачи* (63.1).

Доказательство теорем 73.1–73.4 аналогично доказательству теорем 43.1–43.4 в § 44. Нужно только учесть зависимость функций от f и положить $m = 2$. □

При выполнении условий теорем 73.1–73.4 для указанных в теоремах значений t, μ ряд (72.3) сходится к решению задачи (63.1):

$$\boxed{x(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{(k)}(t, \mu)\mu^k.}$$

73.2. Асимптотическое решение

Обозначим частичную сумму ряда (72.3)

$$Z_n(t, \mu) = \sum_{k=0}^{n} z^{(k)}(t, \mu)\,\mu^k. \qquad (73.4)$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 73.5. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_2, κ_{02}, C_2, $\bar{C}_2$, T, *что при* $D_t = \{t\colon 0 \leqslant t \leqslant T\}$ *выполняются условия* 66.1–66.9. *Тогда найдутся* $\mu_* > 0$, C_*, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (63.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t,\mu) - Z_n(t,\mu)\| \leqslant C_*\mu^{n+1} \tag{73.5}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Теорема 73.6. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_1, κ_2, κ_{02}, C_1, C_2, $\bar{C}_2$, *что при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 66.1–66.9 *и справедливо неравенство* (73.1). *Тогда найдутся* $\mu_* > 0$, C_*, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (63.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t,\mu) - Z_n(t,\mu)\| \leqslant C_*\mu^{n+1}$$

при $t \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Теорема 73.7. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_2, κ_{02}, C_1, C_2, $\bar{C}_2$ *и постоянные* $\kappa_1 \geqslant 0$, $C_1^\circ \geqslant 0$, *что при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 66.1–66.9 *и справедливо неравенство* (73.2). *Тогда для любых значений* $T > 0$, χ, $0 \leqslant \chi < [2(\kappa_1+1)]^{-1}$, *найдутся* $\mu_* > 0$, C_*, $C_*^\circ \geqslant 0$, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (63.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t,\mu) - Z_n(t,\mu)\| \leqslant \mu^{n+1}\left[C_*^\circ t^{(\kappa_1+1)(2n+1)} + C_*\right]$$

при $0 \leqslant t \leqslant T\mu^{-\chi}$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Теорема 73.8. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar{\mu}$, κ_1, κ_2, κ_{02}, C_1, C_2, $\bar{C}_2$, *что при* $D_t = \{t\colon t \geqslant 0\}$ *выполняются условия* 66.1–66.9 *и справедливо неравенство* (73.3). *Тогда для любых значений* $T \geqslant 0$, χ, $0 \leqslant \chi < (n+1)[(n+2)\kappa_1]^{-1}$, *найдутся* $\mu_* > 0$, C_*, *не зависящие от* t, μ *и такие, что решение задачи* (63.1) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t,\mu) - Z_n(t,\mu)\| \leqslant C_*\mu^{n+1}\exp\{(n+1)\kappa_1 t\}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T - \chi\ln\mu$, $0 < \mu \leqslant \mu_*$.

Доказательство теорем 73.5–73.8 аналогично доказательству теорем 43.5–43.8 в § 45. Нужно только учесть зависимость функций от f и положить $m = 2$. □

Из доказательства теорем 73.1–73.4 и из теорем 73.5–73.8 следует, что функция $Z_n(t,\mu)$, задаваемая формулой (73.4), является асимптотическим решением задачи (63.1) на отрезке (теоремы 73.1, 73.5), на полуоси

(теоремы 73.2, 73.6), на асимптотически больших интервалах времени (теоремы 73.3, 73.4, 73.7, 73.8). Справедливы равенства

$$x(t,\mu)=Z_n(t,\mu)+o(\mu^n),\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad \mu\to 0\quad \text{(теоремы 73.1, 73.5)};$$
$$x(t,\mu)=Z_n(t,\mu)+o(\mu^n),\qquad t\geqslant 0,\quad \mu\to 0\quad \text{(теоремы 73.2, 73.6)};$$

$x(t,\mu)=Z_n(t,\mu)+o(\mu^{n\chi_*})$, $0\leqslant t\leqslant T\mu^{-\chi}$, $\mu\to 0$ (теоремы 73.3, 73.7), T,χ – произвольные числа из множества $T>0$, $0\leqslant\chi<[2(\kappa_1+1)]^{-1}$, $\chi_*=1-2\chi(\kappa_1+1)$;

$x(t,\mu)=Z_n(t,\mu)+o(\mu^{n\chi_*})$, $0\leqslant t\leqslant T-\chi\ln\mu$, $\mu\to 0$ (теоремы 73.4, 73.8), T,χ — произвольные числа из множества $T\geqslant 0$, $0\leqslant\chi<(2\kappa_1)^{-1}$, $\chi_*=1-2\kappa_1\chi$ (теорема 73.4), $\chi_*=1-\kappa_1\chi$ (теорема 73.8).

73.3. Точное решение при фиксированном значении μ

При выполнении условий теоремы 73.1 ряд (72.3), построенный методом двух параметров, сходится к решению задачи (63.1) на отрезке $0\leqslant t\leqslant T$ при достаточно малых значениях $\mu>0$. Однако во многих случаях малый параметр μ имеет фиксированное значение. Поэтому представляет интерес теорема 73.9, гарантирующая сходимость ряда (72.3) к решению задачи (63.1) при заданном значении μ, хотя и на временном интервале, вообще говоря, меньшем отрезка $[0,T]$.

Теорема 73.9. *Пусть существуют такие положительные постоянные* $\bar\mu,\kappa_2,\kappa_{02},C_2,\overline{C}_2,T$, *что при* $D_t=\{t\colon 0\leqslant t\leqslant T\}$, $n=0$ *выполняются условия* 66.1–66.9, 73.1, 73.2. *Пусть* δ,μ_* *– такие значения, что* $\delta>0$, $0<\mu_*\leqslant\bar\mu$ *и на множестве*

$$\|u\|\leqslant\delta,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad 0<\mu\leqslant\mu_*,\quad |\varepsilon|\leqslant\mu_*,\quad u\in\mathbf{C}^N,\quad \varepsilon\in\mathbf{C}\quad (73.6)$$

функции $F_i'\Big(u,t,\mu,\varepsilon\Big)$,

$$F_i'\Big(u,t,\mu,\varepsilon\Big)\equiv F_i\Big(u+z^{(0)}(t,\mu)+x^\circ(\varepsilon)-x^\circ(0),\ t,\ \varepsilon,\ f(t,\mu)\Big)-$$
$$-F_i\Big(z^{(0)}(t,\mu),\ t,\ 0,\ f(t,\mu)\Big),\quad i=1,2,\qquad (()73.7)$$

аналитичны по u, ε. *Тогда для любого* μ, $0<\mu<\mu_*$, *найдется такое значение* $t_*=t_*(\mu)$, *что* $0<t_*\leqslant T$ *и на множестве* $0\leqslant t<t_*$: 1) *решение задачи* (63.1) *существует и единственно*; 2) *ряд* (72.3) *сходится к решению задачи* (63.1). *Сходимость равномерная на* $[0,t']$ *при любом* $t'<t_*$.

Доказательство. аналогично доказательству теоремы 43.9 в § 46. Нужно только учесть зависимость функций от f и положить $m=2$. □

73.4. Замечания

Замечание 73.1. Из доказательства теорем 73.5–73.8 следует, что эти теоремы справедливы и в случае, когда в условии 66.2 требуются производные до порядка $n_* \equiv \max(2, n+1)$ включительно.

Замечание 73.2. Если функции F_1, F_2 не зависят явно от f, то задача Коши с двойной сингулярностью (63.1) переходит в задачу Тихонова (22.1) с $m = 2$, теоремы 73.1–73.9 переходят в теоремы 43.1–43.9 соответственно.

Если функция F_1 не зависит явно от x_2, то первые два уравнения (63.1) составляют почти регулярную задачу Коши, а теоремы 73.1–73.9 для них переходят в теоремы 2.1–2.9 соответственно.

Замечание 73.3. Численные оценки остаточного члена асимптотического разложения (72.3), интервала времени, на котором существует решение, значений малого параметра можно получить с помощью теорем 28.5, 28.6.

§ 74. Пример применения метода двух параметров

Пример 74.1. Рассмотрим задачу Коши с двойной сингулярностью из § 70:

$$\frac{dx_1}{dt} = \left[1 + a\cos\left(\frac{t}{\mu^2}\right)\right](x_1+\mu)\,(x_1+\mu-1), \quad x_1|_{t=0} = 0, \tag{74.1}$$

$$\mu\,\frac{dx_2}{dt} = -\left[1 + a\cos\left(\frac{t}{\mu^2}\right)\right] x_2, \quad x_2|_{t=0} = 1, \quad |a| < 1.$$

Вместе с ней рассмотрим задачу с двумя малыми параметрами:

$$\frac{dz_1}{dt} = \left[1 + a\cos\left(\frac{t}{\mu^2}\right)\right](z_1+\varepsilon)\,(z_1+\varepsilon-1), \quad z_1|_{t=0} = 0, \tag{74.2}$$

$$\mu\,\frac{dz_2}{dt} = -\left[1 + a\cos\left(\frac{t}{\mu^2}\right)\right] z_2, \quad z_2|_{t=0} = 1.$$

Решение задачи (74.2) имеет вид

$$z_1(t,\mu,\varepsilon) = \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)[1-\exp\{g_1(t,\mu)\}]}{1-\varepsilon+\varepsilon\exp\{g_1(t,\mu)\}}, \quad z_2(t,\mu,\varepsilon) = \exp\left\{g_2\left(\frac{t}{\mu},\mu\right)\right\}, \tag{74.3}$$

$$g_1(t,\mu) \equiv -t - a\mu^2\sin\left(\frac{t}{\mu^2}\right), \quad g_2(\tau_2,\mu) \equiv -\tau_2 - a\mu\sin\left(\frac{\tau_2}{\mu}\right).$$

Решение задачи (74.1) равно решению задачи (74.2) при $\varepsilon = \mu$. Оно описывается формулами (70.3). Метод двух параметров дает следующее асимптотическое решение задачи (74.1):

$$x_1(t,\mu) = \mu\Big[\exp\{g_1(t,\mu)\} - 1\Big] + \sum_{k=2}^{\infty} \mu^k \exp\{g_1(t,\mu)\}\Big[1-\exp\{g_1(t,\mu)\}\Big]^{k-1}, \tag{74.4}$$

$$x_2(t,\mu) = \exp\left\{g_2\left(\frac{t}{\mu},\mu\right)\right\}.$$

В (74.4) ряд для $x_2(t,\mu)$ состоит из одного члена. Из (70.4), (74.4) следует, что асимптотические решения задачи (74.1), построенные методом пограничных функций и методом двух параметров, совпадают.

Отметим, что ряды (74.4) сходятся к решению задачи (74.1) при $t \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$ и при $0 \leqslant t < t_*$, $\mu > 1$, где t_* — минимальный положительный корень уравнения

$$t + a\mu^2 \sin\left(\frac{t}{\mu^2}\right) = \ln\left(\frac{\mu}{\mu - 1}\right).$$

Задача (74.1) не удовлетворяет условию 66.9, поэтому теоремы 73.1–73.9 к задаче не применимы. Тем не менее из формул (70.3), (74.4) следует, что метод двух параметров дает точное решение задачи (74.1) при $t \geqslant 0$, $0 < \mu \leqslant 1$.

Замечание 74.1. Если вместо постоянной a взять функцию $a = b\mu^{2(n+1)}$, где b — постоянная, то задача (74.1) будет удовлетворять условиям теорем 73.1–73.9.

Замечание 74.2. Из примера 74.1 следует, что метод двух параметров применим к более широкому классу задач, чем охватывают теоремы 73.1–73.9.

Замечание 74.3. Если $a = 0$, то пример 74.1 совпадает с примером 31.7.

Замечание 74.4. Так как при $m = 2$ задача Тихонова (22.1) является частным случаем задачи Коши с двойной сингулярностью (63.1), то примеры из § 31, § 47 с $m = 2$ являются примерами задачи Коши с двойной сингулярностью. В примерах 31.1–31.5, 31.10 правые части дифференциальных уравнений и начальные значения переменных не зависят от малого параметра. Поэтому метод двух параметров к ним не применим. Пример 47.1 показывает, что метод пограничных функций и метод двух параметров дают в общем случае разные асимптотические разложения решения. В примере 47.2 асимптотическое разложение решения не сходится к решению задачи.

§ 75. Выводы главы 9

В главе 9 рассматривается *метод двух параметров* для решения задачи Коши с двойной сингулярностью. Метод описан в § 72. В § 73 даны теоремы о том, что ряд, построенный методом двух параметров, сходится к решению задачи или является асимптотикой решения на отрезке (теоремы 73.1, 73.5), на полуоси (теоремы 73.2, 73.6), на асимптотически больших интервалах времени (теоремы 73.3, 73.4, 73.7, 73.8). Кроме того, в § 73 сформулирована теорема 73.9 о сходимости построенного ряда к решению при фиксированном значении малого параметра на ненулевом интервале времени.

В § 74 метод двух параметров применяется к примеру, рассмотренному в § 70 методом пограничных функций.

§ 76. Выводы части 3

В части 3 рассмотрена *задача Коши с двойной сингулярностью.* Так названа задача Коши, состоящая из двух обыкновенных дифференциальных векторных уравнений, в одном из которых стоит целая степень

малого параметра при производной. В правые части дифференциальных уравнений малый параметр входит как регулярным образом, так и сингулярным — через функцию f (так же, как в части 1). Таким образом, задача Коши с двойной сингулярностью содержит сингулярности двух видов, рассмотренных в первых двух частях книги. Если дифференциальное уравнение не зависит явно от f, то задача становится задачей Тихонова с $m = 2$ из части 2. Возможен случай, когда от задачи Коши с двойной сингулярностью отщепляются уравнения, представляющие собой почти регулярную задачу Коши из части 1.

Решение задачи Коши с двойной сингулярностью строится двумя методами: *методом пограничных функций* в главе 8 и *методом двух параметров* в главе 9. Метод двух параметров имеет меньшую область применимости, чем метод пограничных функций (смотрите замечание 72.1). В тех случаях, когда метод двух параметров применим, он предпочтительнее, чем метод пограничных функций, так как проще: решение строится в виде суммы одного ряда, а в методе пограничных функций решение строится в виде суммы двух рядов. Асимптотические решения, построенные двумя методами, могут совпадать (примеры 70.1, 74.1) и могут быть различными (пример 47.1).

При выполнении условий 66.1–66.9 ряды, построенные двумя методами, являются асимптотическими для решения задачи Коши с двойной сингулярностью на отрезке (теоремы 67.1, 73.5), на полуоси (теоремы 67.2, 73.6) и на асимптотически больших интервалах времени (теоремы 67.3, 67.4, 73.7, 73.8). Асимптотические оценки остаточного члена, полученные двумя методами, совпадают. При выполнении дополнительных условий 73.1, 73.2 ряды, построенные методом двух параметров, сходятся к решению на отрезке (теорема 73.1), на полуоси (теорема 73.2), на асимптотически больших интервалах времени (теоремы 73.3, 73.4). Теорема 73.9 гарантирует сходимость ряда, построенного методом двух параметров, к решению задачи Коши с двойной сингулярностью при фиксированном значении малого параметра на ненулевом интервале времени.

В § 69 даны теоремы о предельном переходе: при стремлении малого параметра к нулю разность между решением исходной задачи (63.1) и решением вырожденной задачи (63.2) стремится к нулю на интервале $0 < t \leqslant T$ (теорема 69.1) и на полуоси $t > 0$ (теорема 69.2).

Литература

1. *Абгарян К. А.* Введение в теорию устойчивости движения на конечном интервале времени. М.: Наука, 1992.
2. *Александров В. В.* Абсолютная устойчивость имитационных динамических систем в первом приближении // Доклады АН СССР. 1988. Т. 299, № 2. С. 296–301.
3. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа. 1999.
4. *Бибиков Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа. 1991.
5. *Борзов В. И.* Задача о разделении движений в динамике полета // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 3–11.
6. *Бутузов В. Ф.* Асимптотика решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производной на полубесконечном промежутке. Вестник Моск. ун-та, № 1, 1965, С. 16–25.
7. *Бутузов В. Ф.* Асимптотические формулы для решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производной на полубесконечном промежутке $(0 \leqslant t < \infty)$. Вестник Моск. ун-та, № 4, 1963, С. 3–14.
8. *Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Федорюк М. В.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Итоги науки. Математический анализ 1967. М. 1969. С. 5–73.
9. *Васильева А. Б.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных // Ж. выч. матем. и мат. физ. 1963. Т. 3, № 4. С. 611–642.
10. *Vasiljeva, A. B., Butuzov, V. F., Kalachev, L. V.* The Boundary Friction Method for Singular Perturbation Problems, SIAM, Philadelphia, PA (1995).
11. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа. 1990.
12. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
13. *Градштейн И. С.* О решениях на временной полупрямой дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных // Матем. сб. 1953. Т. 32(74), № 3. С. 533–544.
14. *Градштейн И. С.* Применение теории устойчивости А. М. Ляпунова к теории дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных // Матем. сб. 1953. Т. 32(74), № 2. С. 263–286.
15. *Гребеников Е. А.* Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986.
16. *Груйич Л. Г., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. Киев. 1984.
17. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1998.

18. *Джакалья Г. Е. О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979.
19. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1978.
20. *Карапетян А. В.* О реализации неголономных связей и об устойчивости кельтских камней // ПММ. 1981. Т. 44. Вып. 1. С. 42–51.
21. *Климов Д. М., Харламов С. А.* Динамика гироскопа в кардановом подвесе. М.: Наука, 1978.
22. *Климушев А. И., Красовский Н. Н.* Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 4. С. 680–690.
23. *Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г., Новожилов И. В.* О прецессионных уравнениях гироскопических систем // ПММ. 1976. Т. 40, № 2. С. 231–237.
24. *Козлов В. В.* Динамика систем с неинтегрируемыми связями I, II, III // Вестн. МГУ, Сер. 1. Математика, механика. 1982. № 3. С. 92–100; 1982. № 4. С. 70–76; 1983. № 3. С. 102–111.
25. *Kuzmina R. P.* Asymptotic methods for ordinary differential equations. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht—Boston—London, 2000.
26. *Кузьмина Р. П.* Асимптотические методы и теория устойчивости // Сб. научно-методических статей по теоретической механике. М., 1988. Вып. 19. С. 95–100.
27. *Кузьмина Р. П.* Метод малого параметра в регулярно возмущенной задаче Коши. М.: Изд-во МГУ, 1991.
28. *Кузьмина Р. П.* Метод малого параметра для сингулярно возмущенных уравнений. М.: Изд-во МГУ. Часть 1, 1993. Часть 2. 1994.
29. *Кузьмина Р. П., Новожилов И. В.* Применение методов теории пограничного слоя в задаче о движении гироскопа в кардановом подвесе // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 1. С. 31–35.
30. *Кузьмина Р. П.* О почти регулярной задаче Коши // Успехи математических наук. 1995. Т. 50. Вып. 4. С. 161–162.
31. *Кузьмина Р. П.* О решении уравнения Ван-дер-Поля // Успехи математических наук. 1997. Т. 52. Вып. 1(313). С. 231–232.
32. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
33. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Гостехиздат. 1950.
34. *Маркечко М. И.* Об асимптотической устойчивости сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Диф. ур. 1989. Т. 25, № 10. С. 1698–1705.
35. *Moulton F. R.* Periodic Orbits. Washington: Carnegie Inst. of Washington. Publ. 161. 1920.
36. *Николаи Е. Л.* Гироскоп в кардановом подвесе. М.: Наука, 1964.
37. *Новожилов И. В.* Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1995.
38. *Понтрягин Л. С.* Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1957. Т. 21. С. 605–626.
39. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Избр. тр., М.: Наука, 1971. Т. 1.

40. *Разумихин Б. С.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных // Сиб. мат. журнал. 1963. Т. 4, № 1. С. 206–211.

41. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., хим. 1957. № 4. с. 9–16.

42. *Стрыгин В. В.*, *Соболев В. А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988.

43. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. сб. 1952. Т. 31(73), № 3. С. 575–586.

44. *Хапаев М. М.* О теореме А. Н. Тихонова для сингулярно возмущенных систем // Доклады АН СССР. 1983. Т. 271, № 5. С. 1074–1077.

45. *Черноусько Ф. Л.* Динамика систем с упругими элементами большой жесткости // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 101–113.

46. *Щитов И. Н.* Асимптотика решений сингулярно возмущенных систем для асимптотически большого временного промежутка. Сб. научн. трудов «Дифференциальные уравнения и прикладные задачи». Тульский полит. ин-т. Тула. 1991. С. 15–19.

47. *Щитов И. Н.* К вопросу об асимптотике решений задачи Коши для сингулярно возмущенной системы // Диф. ур. 1985. Т. 21, № 10. С. 1823–1825.

Именной указатель

Предметный указатель